

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 9
www.vnmath.com

CHUYÊN ĐỀ 1 : ĐA THỨC

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP:

I. TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ:

* Định lí bổ sung:

+ Đa thức $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì có dạng p/q trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất

+ Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì $f(x)$ có một nhân tử là $x - 1$

+ Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì $f(x)$ có một nhân tử là $x + 1$

+ Nếu a là nghiệm nguyên của $f(x)$ và $f(1)$; $f(-1)$ khác 0 thì $\frac{f(1)}{a-1}$ và $\frac{f(-1)}{a+1}$ đều là số

nguyên. Để nhanh chóng loại trừ nghiệm là ước của hệ số tự do

1. Ví dụ 1: $3x^2 - 8x + 4$

Cách 1: Tách hạng tử thứ 2

$$3x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(3x - 2)$$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất:

$$3x^2 - 8x + 4 = (4x^2 - 8x + 4) - x^2 = (2x - 2)^2 - x^2 = (2x - 2 + x)(2x - 2 - x) = (x - 2)(3x - 2)$$

2. Ví dụ 2: $x^3 - x^2 - 4$

Ta nhận thấy nghiệm của $f(x)$ nếu có thì $x = \pm 1; \pm 2; \pm 4$, chỉ có $f(2) = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm của $f(x)$ nên $f(x)$ có một nhân tử là $x - 2$. Do đó ta tách $f(x)$ thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là $x - 2$

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } x^3 - x^2 - 4 &= (x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (2x - 4) = x^2(x - 2) + x(x - 2) + 2(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: } x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4 = (x^3 - 8) - (x^2 - 4)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2)(x + 2) = (x - 2)[(x^2 + 2x + 4) - (x + 2)] = (x - 2)(x^2 + x + 2)$$

3. Ví dụ 3: $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

Nhận xét: $\pm 1, \pm 5$ không là nghiệm của $f(x)$, như vậy $f(x)$ không có nghiệm nguyên. Nên $f(x)$ nếu có nghiệm thì là nghiệm hữu tỉ

Ta nhận thấy $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm của $f(x)$ do đó $f(x)$ có một nhân tử là $3x - 1$. Nên

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 = (3x^3 - x^2) - (6x^2 - 2x) + (15x - 5) \\ &= x^2(3x - 1) - 2x(3x - 1) + 5(3x - 1) = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5) \end{aligned}$$

Vì $x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x - 1)^2 + 4 > 0$ với mọi x nên không phân tích được thành nhân tử nữa

4. Ví dụ 4: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Nhận xét: Tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là $x + 1$

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x^2 + 4x) + (4x + 4) = x^2(x + 1) + 4x(x + 1) + 4(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 + 4x + 4) = (x + 1)(x + 2)^2$$

5. Ví dụ 5: $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2$

Tổng các hệ số bằng 0 thì nên đa thức có một nhân tử là $x - 1$, chia $f(x)$ cho $(x - 1)$ ta có:
 $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2 = (x - 1)(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2)$

Vì $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỉ nên không phân tích được nữa

6. Ví dụ 6: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997 = (x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1 + 1996)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$

7. Ví dụ 7: $x^2 - x - 2001 \cdot 2002 = x^2 - x - 2001 \cdot (2001 + 1)$
 $= x^2 - x - 2001^2 - 2001 = (x^2 - 2001^2) - (x + 2001) = (x + 2001)(x - 2002)$

II. THÊM, BỐT CÙNG MỘT HẠNG TỬ:

1. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện hiệu hai bình phương:

a) Ví dụ 1: $4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 = (2x^2 + 9)^2 - 36x^2$

$$= (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 - 6x)$$

$$= (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)$$

b) Ví dụ 2: $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) + 96x^4$

$$= (x^4 + 1)^2 + 16x^2(x^4 + 1) + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$$

$$= (x^4 + 1 + 8x^2)^2 - 16x^2(x^4 + 1 - 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 - 1)^2$$

$$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 - 4x)^2$$

$$= (x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 4x + 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)$$

2. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện nhân tử chung

a) Ví dụ 1: $x^7 + x^2 + 1 = (x^7 - x) + (x^2 + x + 1) = x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)[x(x - 1)(x^3 + 1) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$$

b) Ví dụ 2: $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$

$$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x - 1)(x^4 + x) + x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)[(x^5 - x^4 + x^2 - x) + (x^3 - x^2) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$$

* Ghi nhớ:

Các đa thức có dạng $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ như: $x^7 + x^2 + 1$; $x^7 + x^5 + 1$; $x^8 + x^4 + 1$; $x^5 + x + 1$; $x^8 + x + 1$; ... đều có nhân tử chung là $x^2 + x + 1$

III. ĐẶT BIẾN PHỤ:

1. Ví dụ 1: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = [x(x + 10)][(x + 4)(x + 6)] + 128$

$$= (x^2 + 10x) + (x^2 + 10x + 24) + 128$$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức có dạng

$$(y - 12)(y + 12) + 128 = y^2 - 144 + 128 = y^2 - 16 = (y + 4)(y - 4)$$

$$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$$

2. Ví dụ 2: $A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

Giả sử $x \neq 0$ ta viết

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^2 \left(x^2 + 6x + 7 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 6 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 7 \right]$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, do đó

$$A = x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2 = [x(x - \frac{1}{x})^2 + 3x]^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

* **Chú ý:** Ví dụ trên có thể giải bằng cách áp dụng hằng đẳng thức như sau:

$$\begin{aligned} A &= x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^4 + (6x^3 - 2x^2) + (9x^2 - 6x + 1) \\ &= x^4 + 2x^2(3x - 1) + (3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2 \end{aligned}$$

3. Ví dụ 3: $A = (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

$$= [(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)](x^2 + y^2 + z^2) + (xy + yz + zx)^2$$

Đặt $x^2 + y^2 + z^2 = a$, $xy + yz + zx = b$ ta có

$$A = a(a + 2b) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2$$

4. Ví dụ 4: $B = 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$

Đặt $x^4 + y^4 + z^4 = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $x + y + z = c$ ta có:

$$B = 2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2a - 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2$$

Ta lại có: $a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$ và $b - c^2 = -2(xy + yz + zx)$ Do đó:

$$\begin{aligned} B &= -4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2 \\ &= -4x^2y^2 - 4y^2z^2 - 4z^2x^2 + 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4z^2x^2 + 8x^2yz + 8xy^2z + 8xyz^2 \\ &= 8xyz(x + y + z) \end{aligned}$$

5. Ví dụ 5: $(a + b + c)^3 - 4(a^3 + b^3 + c^3) - 12abc$

Đặt $a + b = m$, $a - b = n$ thì $4ab = m^2 - n^2$

$$a^3 + b^3 = (a + b)[(a - b)^2 + ab] = m(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4}). \text{ Ta có:}$$

$$C = (m + c)^3 - 4 \cdot \frac{m^3 + 3mn^2}{4} - 4c^3 - 3c(m^2 - n^2) = 3(-c^3 + mc^2 - mn^2 + cn^2)$$

$$= 3[c^2(m - c) - n^2(m - c)] = 3(m - c)(c - n)(c + n) = 3(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$$

IV. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH:

1. Ví dụ 1: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

Nhận xét: các số ± 1 , ± 3 không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỉ

Như vậy nếu đa thức phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$\text{đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho ta có: } \begin{cases} a + c = -6 \\ ac + b + d = 12 \\ ad + bc = -14 \\ bd = 3 \end{cases}$$

Xét $bd = 3$ với $b, d \in \mathbb{Z}$, $b \in \{\pm 1, \pm 3\}$ với $b = 3$ thì $d = 1$ hệ điều kiện trên trở thành

$$\begin{cases} a + c = -6 \\ ac = -8 \\ a + 3c = -14 \\ bd = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = -8 \\ ac = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -4 \\ a = -2 \end{cases}$$

Vậy: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$

2. Ví dụ 2: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

Nhận xét: đa thức có 1 nghiệm là $x = 2$ nên có thừa số là $x - 2$ do đó ta có:

$$2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + ax^2 + bx + c)$$

$$= 2x^4 + (a - 4)x^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c \Rightarrow \begin{cases} a - 4 = -3 \\ b - 2a = -7 \\ c - 2b = 6 \\ -2c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = -4 \end{cases}$$

Suy ra: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + x^2 - 5x - 4)$

Ta lại có $2x^3 + x^2 - 5x - 4$ là đa thức có tổng hệ số của các hạng tử bậc lẻ và bậc chẵn bằng nhau nên có 1 nhân tử là $x + 1$ nên $2x^3 + x^2 - 5x - 4 = (x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Vậy: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(x + 1)(2x^2 - x - 4)$

3. Ví dụ 3:

$$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (ax + by + 3)(cx + dy - 1)$$

$$= acx^2 + (3c - a)x + bdy^2 + (3d - b)y + (bc + ad)xy - 3 \Rightarrow \begin{cases} ac = 12 \\ bc + ad = -10 \\ 3c - a = 5 \\ bd = -12 \\ 3d - b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 3 \\ b = -6 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (4x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$$

BÀI TẬP:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $x^3 - 7x + 6$

2) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$

3) $x^3 - 6x^2 - x + 30$

4) $2x^3 - x^2 + 5x + 3$

5) $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$

6) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$

7) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

8) $4x^4 - 32x^2 + 1$

9) $3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2$

10) $64x^4 + y^4$

11) $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$

12) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$

13) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

14) $x^8 + x + 1$

15) $x^8 + 3x^4 + 4$

16) $3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 + 10$

17) $x^4 - 8x + 63$

CHUYÊN ĐỀ 2 - LUỸ THỪA BẬC N CỦA MỘT NHỊ THỨC

B. KIẾN THỨC VÀ BÀI TẬP VẬN DỤNG:

I. Một số hằng đẳng thức tổng quát:

$$1. \quad a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$2. \quad a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$3. \text{ Nhị thức Niuton: } (a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Trong đó: $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{1.2.3\dots k}$: Tổ hợp chập k của n phần tử

II. Cách xác định hệ số của khai triển Niuton:

$$1. \text{ Cách 1: Dùng công thức } C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!}$$

Chẳng hạn hệ số của hạng tử a^4b^3 trong khai triển của $(a + b)^7$ là $C_7^4 = \frac{7.6.5.4}{4!} = \frac{7.6.5.4}{4.3.2.1} = 35$

$$\text{Chú ý: a) } C_n^k = \frac{n!}{n!(n-k)!} \text{ với quy ước } 0! = 1 \Rightarrow C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = 35$$

$$\text{b) Ta có: } C_n^k = C_n^{n-k} \text{ nên } C_7^4 = C_7^3 = \frac{7.6.5}{3!} = 35$$

2. Cách 2: Dùng tam giác Patxcan

Đỉnh						1						
Dòng 1(n = 1)						1		1				
Dòng 2(n = 2)					1		2		1			
Dòng 3(n = 3)				1		3		3		1		
Dòng 4(n = 4)			1		4		6		4		1	
Dòng 5(n = 5)		1		5		10		10		5		1
Dòng 6(n = 6)	1		6		15		20		15		6	1

Trong tam giác này, hai cạnh bên gồm các số 1; dòng k + 1 được thành lập từ dòng k (k ≥ 1), chẳng hạn ở dòng 2 (n = 2) ta có 2 = 1 + 1, dòng 3 (n = 3): 3 = 2 + 1, 3 = 1 + 2 dòng 4 (n = 4): 4 = 1 + 3, 6 = 3 + 3, 4 = 3 + 1, ...

$$\text{Với } n = 4 \text{ thì: } (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{Với } n = 5 \text{ thì: } (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\text{Với } n = 6 \text{ thì: } (a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

3. Cách 3:

Tìm hệ số của hạng tử đứng sau theo các hệ số của hạng tử đứng trước:

a) Hệ số của hạng tử thứ nhất bằng 1

b) Muốn có hệ số của của hạng tử thứ k + 1, ta lấy hệ số của hạng tử thứ k nhân với số mũ của biến trong hạng tử thứ k rồi chia cho k

$$\text{Chẳng hạn: } (a + b)^4 = a^4 + \frac{1.4}{1} a^3b + \frac{4.3}{2} a^2b^2 + \frac{4.3.2}{2.3} ab^3 + \frac{4.3.2}{2.3.4} b^5$$

Chú ý rằng: các hệ số của khai triển Niuton có tính đối xứng qua hạng tử đứng giữa, nghĩa là các hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối có hệ số bằng nhau

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2b^{n-2} + na^{n-1}b^{n-1} + b^n$$

III. Ví dụ:**1. Ví dụ 1:** phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $A = (x + y)^5 - x^5 - y^5$

Cách 1: khai triển $(x + y)^5$ rồi rút gọn A

$$\begin{aligned} A &= (x + y)^5 - x^5 - y^5 = (x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) - x^5 - y^5 \\ &= 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) \\ &= 5xy[(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x + y)] = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

Cách 2: $A = (x + y)^5 - (x^5 + y^5)$ $x^5 + y^5$ chia hết cho $x + y$ nên chia $x^5 + y^5$ cho $x + y$ ta có: $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$ nên A có nhân tử chung là $(x + y)$, đặt $(x + y)$ làm nhân tử chung, ta tìm được nhân tử còn lại

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= (x + y)^7 - x^7 - y^7 = (x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7) - x^7 - y^7 \\ &= 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 \\ &= 7xy[(x^5 + y^5) + 3(x^4y + xy^4) + 5(x^3y^2 + x^2y^3)] \\ &= 7xy \{ [(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)] + 3xy(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 5x^2y^2(x + y) \} \\ &= 7xy(x + y)[x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 3xy(x^2 + xy + y^2) + 5x^2y^2] \\ &= 7xy(x + y)[x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 3x^3y - 3x^2y^2 + 3xy^3 + 5x^2y^2] \\ &= 7xy(x + y)[(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + 2xy(x^2 + y^2) + x^2y^2] = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm tổng hệ số các đa thức có được sau khi khai triển

a) $(4x - 3)^4$

Cách 1: Theo công thức Niu-ton ta có:

$$(4x - 3)^4 = 4 \cdot (4x)^3 \cdot 3 + 6 \cdot (4x)^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 4x \cdot 3^3 + 3^4 = 256x^4 - 768x^3 + 864x^2 - 432x + 81$$

Tổng các hệ số: $256 - 768 + 864 - 432 + 81 = 1$

b) Cách 2: Xét đẳng thức $(4x - 3)^4 = c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$

Tổng các hệ số: $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Thay $x = 1$ vào đẳng thức trên ta có: $(4 \cdot 1 - 3)^4 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Vậy: $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$

* Ghi chú: Tổng các hệ số khai triển của một nhị thức, một đa thức bằng giá trị của đa thức đó tại $x = 1$ **C. BÀI TẬP:**

Bài 1: Phân tích thành nhân tử

a) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$

b) $(x + y)^4 + x^4 + y^4$

Bài 2: Tìm tổng các hệ số có được sau khi khai triển đa thức

a) $(5x - 2)^5$

b) $(x^2 + x - 2)^{2010} + (x^2 - x + 1)^{2011}$

$5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5

Suy ra $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5 (**)

Từ (*) và (**) suy ra đpcm

b) Đặt $A = n^4 - 10n^2 + 9 = (n^4 - n^2) - (9n^2 - 9) = (n^2 - 1)(n^2 - 9) = (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n + 3)$

Vì n lẻ nên đặt $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì

$A = (2k - 2).2k.(2k + 2)(2k + 4) = 16(k - 1).k.(k + 1).(k + 2) \Rightarrow A$ chia hết cho 16 (1)

Và $(k - 1).k.(k + 1).(k + 2)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên A có chứa bội của 2, 3, 4 nên A là bội của 24 hay A chia hết cho 24 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 16. 24 = 384

c) $10^n + 18n - 28 = (10^n - 9n - 1) + (27n - 27)$

+ Ta có: $27n - 27 : 27$ (1)

+ $10^n - 9n - 1 = [(9\underbrace{\dots}_n + 1) - 9n - 1] = \underbrace{9\dots 9}_n - 9n = 9(\underbrace{1\dots 1}_n - n) : 27$ (2)

vì $9 : 9$ và $\underbrace{1\dots 1}_n - n : 3$ do $\underbrace{1\dots 1}_n - n$ là một số có tổng các chữ số chia hết cho 3

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

3. Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì

a) $a^3 - a$ chia hết cho 3

b) $a^7 - a$ chia hết cho 7

Giải

a) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 3 nên $(a - 1)a(a + 1)$ chia hết cho 3

b) $a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

Nếu $a = 7k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì a chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $a^2 - 1 = 49k^2 + 14k$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $a^2 + a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $a^2 - a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Trong trường hợp nào cũng có một thừa số chia hết cho 7

Vậy: $a^7 - a$ chia hết cho 7

Bài 4: Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$

Giải

Ta có: $B = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 101.50$

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có: $A = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + \dots + (50^3 + 51^3)$

$= (1 + 100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2 + 99)(2^2 + 2.99 + 99^2) + \dots + (50 + 51)(50^2 + 50.51 + 51^2) = 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2.99 + 99^2 + \dots + 50^2 + 50.51 + 51^2)$ chia hết cho 101

(1)

Lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + \dots + (50^3 + 100^3)$

Mỗi số hạng trong ngoặc đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chia hết cho B

Bài tập về nhà

Chứng minh rằng:

a) $a^5 - a$ chia hết cho 5

b) $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với mọi n chẵn

c) Cho a là số nguyên tố lớn hơn 3. Cmr $a^2 - 1$ chia hết cho 24

d) Nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6

e) 2009^{2010} không chia hết cho 2010

f) $n^2 + 7n + 22$ không chia hết cho 9

Dạng 2: Tìm số dư của một phép chia

Bài 1:

Tìm số dư khi chia 2^{100}

a) cho 9, b) cho 25, c) cho 125

Giải

a) Luỹ thừa của 2 sát với bội của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$

Ta có : $2^{100} = 2 \cdot (2^3)^{33} = 2 \cdot (9 - 1)^{33} = 2 \cdot [B(9) - 1] = B(9) - 2 = B(9) + 7$

Vậy: 2^{100} chia cho 9 thì dư 7

b) Tương tự ta có: $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = [B(25) - 1]^{10} = B(25) + 1$

Vậy: 2^{100} chia cho 25 thì dư 1

c) Sử dụng công thức Niuton:

$$2^{100} = (5 - 1)^{50} = (5^{50} - 5 \cdot 5^{49} + \dots + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 5^2 - 50 \cdot 5) + 1$$

Không kể phần hệ số của khai triển Niuton thì 48 số hạng đầu đã chứa thừa số 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên đều chia hết cho $5^3 = 125$, hai số hạng tiếp theo: $\frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 5^2 - 50 \cdot 5$

cũng chia hết cho 125, số hạng cuối cùng là 1

Vậy: $2^{100} = B(125) + 1$ nên chia cho 125 thì dư 1

Bài 2:

Viết số 1995^{1995} thành tổng của các số tự nhiên. Tổng các lập phương đó chia cho 6 thì dư bao nhiêu?

Giải

Đặt $1995^{1995} = a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Gọi $S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 + a - a$

$$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_n^3 - a_n) + a$$

Mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 6 vì mỗi dấu ngoặc là tích của ba số tự nhiên liên tiếp. Chỉ cần tìm số dư khi chia a cho 6

1995 là số lẻ chia hết cho 3, nên a cũng là số lẻ chia hết cho 3, do đó chia cho 6 dư 3

Bài 3: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} viết trong hệ thập phân

giải

Tìm 3 chữ số tận cùng là tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 1000

Trước hết ta tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 125

Vận dụng bài 1 ta có $2^{100} = B(125) + 1$ mà 2^{100} là số chẵn nên 3 chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là 126, 376, 626 hoặc 876

Hiển nhiên 2^{100} chia hết cho 8 vì $2^{100} = 16^{25}$ chỉ hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó chia hết cho 8

trong các số 126, 376, 626 hoặc 876 chỉ có 376 chia hết cho 8

Vậy: 2^{100} viết trong hệ thập phân có ba chữ số tận cùng là 376

Tổng quát: Nếu n là số chẵn không chia hết cho 5 thì 3 chữ số tận cùng của nó là 376

Bài 4: Tìm số dư trong phép chia các số sau cho 7

a) $22^{22} + 55^{55}$ b) 3^{1993}

c) $1992^{1993} + 1994^{1995}$ d) $3^{2^{1930}}$

Giải

a) ta có: $22^{22} + 55^{55} = (21 + 1)^{22} + (56 - 1)^{55} = (\text{BS } 7 + 1)^{22} + (\text{BS } 7 - 1)^{55}$
 $= \text{BS } 7 + 1 + \text{BS } 7 - 1 = \text{BS } 7$ nên $22^{22} + 55^{55}$ chia 7 dư 0

b) Luỹ thừa của 3 sát với bội của 7 là $3^3 = \text{BS } 7 - 1$

Ta thấy $1993 = \text{BS } 6 + 1 = 6k + 1$, do đó:

$3^{1993} = 3^{6k+1} = 3 \cdot (3^3)^{2k} = 3(\text{BS } 7 - 1)^{2k} = 3(\text{BS } 7 + 1) = \text{BS } 7 + 3$

c) Ta thấy 1995 chia hết cho 7, do đó:

$1992^{1993} + 1994^{1995} = (\text{BS } 7 - 3)^{1993} + (\text{BS } 7 - 1)^{1995} = \text{BS } 7 - 3^{1993} + \text{BS } 7 - 1$

Theo câu b ta có $3^{1993} = \text{BS } 7 + 3$ nên

$1992^{1993} + 1994^{1995} = \text{BS } 7 - (\text{BS } 7 + 3) - 1 = \text{BS } 7 - 4$ nên chia cho 7 thì dư 3

d) $3^{2^{1930}} = 3^{2860} = 3^{3k+1} = 3 \cdot 3^{3k} = 3(\text{BS } 7 - 1) = \text{BS } 7 - 3$ nên chia cho 7 thì dư 4

Bài tập về nhà

Tìm số dư khi:

a) 2^{1994} cho 7

b) $3^{1998} + 5^{1998}$ cho 13

c) $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 99^3$ chia cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 99$

Dạng 3: Tìm điều kiện để xảy ra quan hệ chia hết**Bài 1:** Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để giá trị của biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $B = n^2 - n$

Giải

Chia A cho B ta có: $n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = (n + 3)(n^2 - n) + 2$

Để A chia hết cho B thì 2 phải chia hết cho $n^2 - n = n(n - 1)$ do đó 2 chia hết cho n, ta có:

n	1	- 1	2	- 2
n - 1	0	- 2	1	- 3
n(n - 1)	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy: Để giá trị của biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $B = n^2 - n$ thì $n \in \{-1; 2\}$ **Bài 2:**

a) Tìm $n \in \mathbb{N}$ để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

b) Giải bài toán trên nếu $n \in \mathbb{Z}$

Giải

Ta có: $n^5 + 1 : n^3 + 1 \Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : n^3 + 1 \Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) : n^3 + 1$

$\Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) : (n + 1)(n^2 - n + 1) \Leftrightarrow n - 1 : n^2 - n + 1$ (Vì $n + 1 \neq 0$)

a) Nếu $n = 1$ thì $0 : 1$

Nếu $n > 1$ thì $n - 1 < n(n - 1) + 1 < n^2 - n + 1$ nên không thể xảy ra $n - 1 : n^2 - n + 1$

Vậy giá trị của n tìm được là $n = 1$

b) $n - 1 : n^2 - n + 1 \Rightarrow n(n - 1) : n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : n^2 - n + 1$

$\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$. Có hai trường hợp xảy ra:

$+ n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n(n - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$ (Tm đề bài)

$$+n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0 \text{ (Vô nghiệm)}$$

Bài 3: Tìm số nguyên n sao cho:

a) $n^2 + 2n - 4 : 11$

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1$

c) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 : n^4 - 1$

d) $n^3 - n^2 + 2n + 7 : n^2 + 1$

Giải

a) Tách $n^2 + 2n - 4$ thành tổng hai hạng tử trong đó có một hạng tử là B(11)

$$n^2 + 2n - 4 : 11 \Leftrightarrow (n^2 - 2n - 15) + 11 : 11 \Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) + 11 : 11$$

$$\Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) : 11 \Leftrightarrow \begin{cases} n - 3 : 11 \\ n + 5 : 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = B(11) + 3 \\ n = B(11) - 5 \end{cases}$$

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1 = (n^2 + n + 4)(2n - 1) + 5$

$$\text{Để } 2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1 \text{ thì } 5 : 2n - 1 \text{ hay } 2n - 1 \text{ là Ư(5)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n - 1 = -5 \\ 2n - 1 = -1 \\ 2n - 1 = 1 \\ 2n - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy: $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1$

c) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 : n^4 - 1$

$$\text{Đặt } A = n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 = (n^4 - n^3) - (n^3 - n^2) + (n^2 - n) - (n - 1)$$

$$= n^3(n - 1) - n^2(n - 1) + n(n - 1) - (n - 1) = (n - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) = (n - 1)^2(n^2 + 1)$$

$$B = n^4 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$

A chia hết cho b nên $n \neq \pm 1 \Rightarrow A$ chia hết cho B $\Leftrightarrow n - 1 : n + 1 \Leftrightarrow (n + 1) - 2 : n + 1$

$$\Leftrightarrow 2 : n + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} n + 1 = -2 \\ n + 1 = -1 \\ n + 1 = 1 \\ n + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 \\ n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \text{ (không Tm)} \end{cases}$$

Vậy: $n \in \{-3; -2; 0\}$ thì $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 : n^4 - 1$

d) Chia $n^3 - n^2 + 2n + 7$ cho $n^2 + 1$ được thương là $n - 1$, dư $n + 8$

$$\text{Để } n^3 - n^2 + 2n + 7 : n^2 + 1 \text{ thì } n + 8 : n^2 + 1 \Rightarrow (n + 8)(n - 8) : n^2 + 1 \Leftrightarrow 65 : n^2 + 1$$

Lần lượt cho $n^2 + 1$ bằng 1; 5; 13; 65 ta được n bằng 0; ± 2 ; ± 8

Thử lại ta có $n = 0$; $n = 2$; $n = 8$ (T/m)

Vậy: $n^3 - n^2 + 2n + 7 : n^2 + 1$ khi $n = 0$, $n = 8$

Bài tập về nhà:

Tìm số nguyên n để:

a) $n^3 - 2$ chia hết cho $n - 2$

b) $n^3 - 3n^2 - 3n - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

c) $5^n - 2^n$ chia hết cho 63

Dạng 4: Tồn tại hay không tồn tại sự chia hết

Bài 1: Tìm $n \in \mathbb{N}$ sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 7

Giải

Nếu $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$ chia hết cho 7

Nếu $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1 = \text{BS } 7 + 1$

Nếu $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3 = \text{BS } 7 + 3$

Vậy: $2^n - 1$ chia hết cho 7 khi $n = \text{BS } 3$

Bài 2: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để:

a) $3^n - 1$ chia hết cho 8

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1}$ chia hết cho 25

c) $5^n - 2^n$ chia hết cho 9

Giải

a) Khi $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1$ chia hết cho $9 - 1 = 8$

Khi $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $3^n - 1 = 3^{2k+1} - 1 = 3 \cdot (9^k - 1) + 2 = \text{BS } 8 + 2$

Vậy: $3^n - 1$ chia hết cho 8 khi $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} = 27 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 2^{4n} = (25 + 2) 3^{2n} + 2 \cdot 2^{4n} = 25 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 2^{4n}$
 $= \text{BS } 25 + 2(9^n + 16^n)$

Nếu $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $9^n + 16^n = 9^{2k+1} + 16^{2k+1}$ chia hết cho $9 + 16 = 25$

Nếu $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì 9^n có chữ số tận cùng bằng 1, còn 16^n có chữ số tận cùng bằng 6 suy ra $2(9^n + 16^n)$ có chữ số tận cùng bằng 4 nên A không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 25

c) Nếu $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $5^n - 2^n = 5^{3k} - 2^{3k}$ chia hết cho $5^3 - 2^3 = 117$ nên chia hết cho 9

Nếu $n = 3k + 1$ thì $5^n - 2^n = 5 \cdot 5^{3k} - 2 \cdot 2^{3k} = 5(5^{3k} - 2^{3k}) + 3 \cdot 2^{3k} = \text{BS } 9 + 3 \cdot 8^k$

$= \text{BS } 9 + 3(\text{BS } 9 - 1)^k = \text{BS } 9 + \text{BS } 9 + 3$

Tương tự: nếu $n = 3k + 2$ thì $5^n - 2^n$ không chia hết cho 9

www.vnmith.com

CHUYÊN ĐỀ 4 – TÍNH CHIA HẾT ĐỐI VỚI ĐA THỨC

A. Dạng 1: Tìm dư của phép chia mà không thực hiện phép chia

1. Đa thức chia có dạng $x - a$ (a là hằng)

a) Định lí Bôđơ (Bezout, 1730 – 1783):

Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ bằng giá trị của $f(x)$ tại $x = a$

Ta có: $f(x) = (x - a).Q(x) + r$

Đẳng thức đúng với mọi x nên với $x = a$, ta có

$f(a) = 0.Q(a) + r$ hay $f(a) = r$

Ta suy ra: $f(x)$ chia hết cho $x - a \Leftrightarrow f(a) = 0$

b) $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì chia hết cho $x - 1$

c) $f(x)$ có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì chia hết cho $x + 1$

Ví dụ : Không làm phép chia, hãy xét xem $A = x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ chia hết cho

$B = x + 1$, $C = x - 3$ không

Kết quả:

A chia hết cho B , không chia hết cho C

2. Đa thức chia có bậc hai trở lên

Cách 1: Tách đa thức bị chia thành tổng của các đa thức chia hết cho đa thức chia và dư

Cách 2: Xét giá trị riêng: gọi thương của phép chia là $Q(x)$, dư là $ax + b$ thì

$f(x) = g(x).Q(x) + ax + b$

Ví dụ 1: Tìm dư của phép chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$

Cách 1: Ta biết rằng $x^{2n} - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$ nên ta tách:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x^7 - x) + (x^5 - x) + (x^3 - x) + 3x + 1$
 $= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + 3x + 1$ chia cho $x^2 - 1$ dư $3x + 1$

Cách 2:

Gọi thương của phép chia là $Q(x)$, dư là $ax + b$, Ta có:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x - 1)(x + 1).Q(x) + ax + b$ với mọi x

Đẳng thức đúng với mọi x nên với $x = 1$, ta có $4 = a + b$ (1)

với $x = -1$ ta có $-2 = -a + b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = 3$, $b = 1$ nên ta được dư là $3x + 1$

Ghi nhớ:

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ ($a \neq -b$)

$a^n + b^n$ (n lẻ) chia hết cho $a + b$ ($a \neq -b$)

Ví dụ 2: Tìm dư của các phép chia

a) x^{41} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x$ cho $x^2 - 1$

c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho $x^2 + 1$

Giải

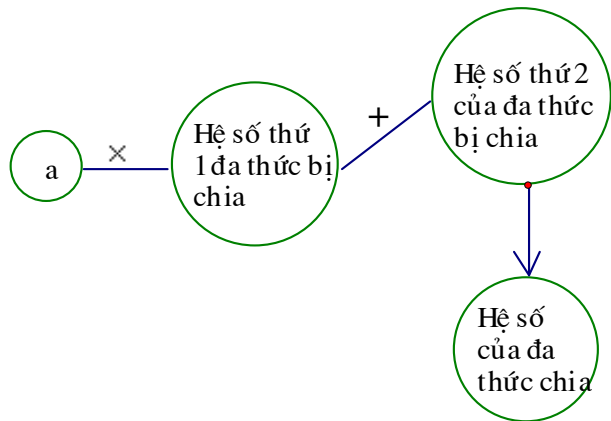
- a) $x^{41} = x^{41} - x + x = x(x^{40} - 1) + x = x[(x^4)^{10} - 1] + x$ chia cho $x^4 - 1$ dư x nên chia cho $x^2 + 1$ dư x
- b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x = (x^{27} - x) + (x^9 - x) + (x^3 - x) + 4x$
 $= x(x^{26} - 1) + x(x^8 - 1) + x(x^2 - 1) + 4x$ chia cho $x^2 - 1$ dư $4x$
- c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 = x(x^{98} + 1) + x(x^{54} + 1) + x(x^{10} + 1) - 2x + 7$
 chia cho $x^2 + 1$ dư $-2x + 7$

B. Sơ đồ HORNƠ

1. Sơ đồ

Để tìm kết quả của phép chia $f(x)$ cho $x - a$ (a là hằng số), ta sử dụng sơ đồ hornơ

Nếu đa thức bị chia là $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$,
 đa thức chia là $x - a$ ta được thương là
 $b_0x^2 + b_1x + b_2$, dư r thì ta có



	a_0	a_1	a_2	a_3
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$r = ab_2 + a_3$

Ví dụ:

Đa thức bị chia: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, đa thức chia $x - 2$

Ta có sơ đồ

	1	-5	8	-4
2	1	$2 \cdot 1 + (-5) = -3$	$2 \cdot (-3) + 8 = 2$	$r = 2 \cdot 2 + (-4) = 0$

Vậy: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2)(x^2 - 3x + 2) + 0$ là phép chia hết

2. Áp dụng sơ đồ Hornơ để tính giá trị của đa thức tại $x = a$

Giá trị của $f(x)$ tại $x = a$ là số dư của phép chia $f(x)$ cho $x - a$

1. Ví dụ 1:

Tính giá trị của $A = x^3 + 3x^2 - 4$ tại $x = 2010$

Ta có sơ đồ:

	1	3	0	-4
$a = 2010$	1	$2010 \cdot 1 + 3 = 2013$	$2010 \cdot 2013 + 0 = 4046130$	$2010 \cdot 4046130 - 4 = 8132721296$

Vậy: $A(2010) = 8132721296$

C. Chứng minh một đa thức chia hết cho một đa thức khác

I. Phương pháp:

- Cách 1: Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử có một thừa số là đa thức chia
- Cách 2: biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia hết cho đa thức chia
- Cách 3: Biến đổi tương đương $f(x) : g(x) \Leftrightarrow f(x) \pm g(x) : g(x)$
- Cách 4: Chứng tỏ mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia

II. Ví dụ

1. Ví dụ 1:

Chứng minh rằng: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

Ta có: $x^{8n} + x^{4n} + 1 = x^{8n} + 2x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - x^{4n} = (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1)$

Ta lại có: $x^{4n} + x^{2n} + 1 = x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)$

chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

Vậy: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

2. Ví dụ 2:

Chứng minh rằng: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1 = x^{3m+1} - x + x^{3n+2} - x^2 + x^2 + x + 1$

$$= x(x^{3m} - 1) + x^2(x^{3n} - 1) + (x^2 + x + 1)$$

Vì $x^{3m} - 1$ và $x^{3n} - 1$ chia hết cho $x^3 - 1$ nên chia hết cho $x^2 + x + 1$

Vậy: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$

3. Ví dụ 3: Chứng minh rằng

$f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + \dots + x^{11} + 1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$

Ta có: $f(x) - g(x) = x^{99} - x^9 + x^{88} - x^8 + x^{77} - x^7 + \dots + x^{11} - x + 1 - 1$

$$= x^9(x^{90} - 1) + x^8(x^{80} - 1) + \dots + x(x^{10} - 1) \text{ chia hết cho } x^{10} - 1$$

Mà $x^{10} - 1 = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1)$ chia hết cho $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$

Suy ra $f(x) - g(x)$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$

Nên $f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + \dots + x^{11} + 1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$

4. Ví dụ 4: CMR: $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

Đa thức $g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$

Ta có $f(0) = (-1)^{10} + 1^{10} - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của $f(x) \Rightarrow f(x)$ chứa thừa số x

$f(1) = (1^2 + 1 - 1)^{10} + (1^2 - 1 + 1)^{10} - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của $f(x)$ $f(x)$ chứa thừa số

$x - 1$, mà các thừa số x và $x - 1$ không có nhân tử chung, do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x - 1)$

hay $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

5. Ví dụ 5: Chứng minh rằng

a) $A = x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

b) $C = 8x^9 - 9x^8 + 1$ chia hết cho $D = (x - 1)^2$

c) $C(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho $D(x) = x(x + 1)(2x + 1)$

Giải

a) $A = x^2 - x^9 - x^{1945} = (x^2 - x + 1) - (x^9 + 1) - (x^{1945} - x)$

Ta có: $x^2 - x + 1$ chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

$x^9 + 1$ chia hết cho $x^3 + 1$ nên chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

$x^{1945} - x = x(x^{1944} - 1)$ chia hết cho $x^3 + 1$ (cùng có nghiệm là $x = -1$)

nên chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

Vậy $A = x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } C &= 8x^9 - 9x^8 + 1 = 8x^9 - 8 - 9x^8 + 9 = 8(x^9 - 1) - 9(x^8 - 1) \\
 &= 8(x - 1)(x^8 + x^7 + \dots + 1) - 9(x - 1)(x^7 + x^6 + \dots + 1) \\
 &= (x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1) \\
 &(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1) \text{ chia hết cho } x - 1 \text{ vì có tổng hệ số bằng } 0 \\
 &\text{suy ra } (x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1) \text{ chia hết cho } (x - 1)^2
 \end{aligned}$$

c) Đa thức chia $D(x) = x(x + 1)(2x + 1)$ có ba nghiệm là $x = 0, x = -1, x = -\frac{1}{2}$

Ta có:

$$C(0) = (0 + 1)^{2n} - 0^{2n} - 2 \cdot 0 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ là nghiệm của } C(x)$$

$$C(-1) = (-1 + 1)^{2n} - (-1)^{2n} - 2 \cdot (-1) - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ là nghiệm của } C(x)$$

$$C(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2} + 1)^{2n} - (-\frac{1}{2})^{2n} - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm của } C(x)$$

Mọi nghiệm của đa thức chia là nghiệm của đa thức bị chia $\Rightarrow \text{đpcm}$

6. Ví dụ 6:

Cho $f(x)$ là đa thức có hệ số nguyên. Biết $f(0), f(1)$ là các số lẻ. Chứng minh rằng $f(x)$ không có nghiệm nguyên

Giả sử $x = a$ là nghiệm nguyên của $f(x)$ thì $f(x) = (x - a) \cdot Q(x)$. Trong đó $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên, do đó $f(0) = -a \cdot Q(0), f(1) = (1 - a) \cdot Q(1)$

Do $f(0)$ là số lẻ nên a là số lẻ, $f(1)$ là số lẻ nên $1 - a$ là số lẻ, mà $1 - a$ là hiệu của 2 số lẻ không thể là số lẻ, mâu thuẫn

Vậy $f(x)$ không có nghiệm nguyên

Bài tập về nhà:

Bài 1: Tìm số dư khi

a) x^{43} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{77} + x^{55} + x^{33} + x^{11} + x + 9$ cho $x^2 + 1$

Bài 2: Tính giá trị của đa thức $x^4 + 3x^3 - 8$ tại $x = 2009$

Bài 3: Chứng minh rằng

a) $x^{50} + x^{10} + 1$ chia hết cho $x^{20} + x^{10} + 1$

b) $x^{10} - 10x + 9$ chia hết cho $x^2 - 2x + 1$

c) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia hết cho $x^2 + 2x + 1$

d) $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n+2}$ chia hết cho $x^2 + 1$

e) $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ chia hết cho $(x + 1)(x - 1)^2$

CHUYÊN ĐỀ 5 : SỐ CHÍNH PHƯƠNG

I. Số chính phương:

A. Một số kiến thức:

Số chính phương: số bằng bình phương của một số khác

Ví dụ:

$$4 = 2^2; 9 = 3^2$$

$$A = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2 = B^2$$

+ Số chính phương không tận cùng bởi các chữ số: 2, 3, 7, 8

+ Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4, chia hết cho 3 thì chia hết cho 9, chia hết cho 5 thì chia hết cho 25, chia hết cho 2^3 thì chia hết cho 2^4 ,...

+ Số $\underbrace{11\dots1}_n = a$ thì $\underbrace{99\dots9}_n = 9a \Rightarrow 9a + 1 = \underbrace{99\dots9}_n + 1 = 10^n$

B. Một số bài toán:

1. Bài 1:

Chứng minh rằng: Một số chính phương chia cho 3, cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1

Giải

Gọi $A = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$)

a) xét $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow A = 9k^2$ nên chia hết cho 3

$n = 3k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow A = 9k^2 \pm 6k + 1$, chia cho 3 dư 1

Vậy: số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1

b) $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $A = 4k^2$ chia hết cho 4

$n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $A = 4k^2 + 4k + 1$ chia cho 4 dư 1

Vậy: số chính phương chia cho 4 dư 0 hoặc 1

Chú ý: + Số chính phương chẵn thì chia hết cho 4

+ Số chính phương lẻ thì chia cho 4 thì dư 1 (Chia 8 cũng dư 1)

2. Bài 2: Số nào trong các số sau là số chính phương

a) $M = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$

b) $N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2$

c) $P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$

d) $Q = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$

e) $R = 1^3 + 2^3 + \dots + 100^3$

Giải

a) các số $1993^2, 1994^2$ chia cho 3 dư 1, còn 1992^2 chia hết cho 3 $\Rightarrow M$ chia cho 3 dư 2 do đó M không là số chính phương

b) $N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2$ gồm tổng hai số chính phương chẵn chia hết cho 4, và hai số chính phương lẻ nên chia 4 dư 2 suy ra N không là số chính phương

c) $P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$ chia 4 dư 2 nên không là số chính phương

d) $Q = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$

Số Q gồm 50 số chính phương chẵn chia hết cho 4, 50 số chính phương lẻ, mỗi số chia 4 dư 1 nên tổng 50 số lẻ đó chia 4 thì dư 2 do đó Q chia 4 thì dư 2 nên Q không là số chính phương

e) $R = 1^3 + 2^3 + \dots + 100^3$

Gọi $A_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, $A_{k-1} = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k-1)}{2}$

Ta có: $A_k^2 - A_{k-1}^2 = k^3$ khi đó:

$1^3 = A_1^2$

$2^3 = A_2^2 - A_1^2$

.....

$n^3 = A_n^2 - A_{n-1}^2$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta có:

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = A_n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \left[\frac{100(100+1)}{2} \right]^2 = (50.101)^2$ là số chính phương

3. Bài 3:

CMR: Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì các số sau là số chính phương.

a) $A = (10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$

$A = (\underbrace{11\dots1}_n)(10^{n+1} + 5) + 1 = \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} \cdot (10^{n+1} + 5) + 1$

Đặt $a = 10^{n+1}$ thì $A = \frac{a-1}{9} (a+5) + 1 = \frac{a^2 + 4a - 5 + 9}{9} = \frac{a^2 + 4a + 4}{9} = \left(\frac{a+2}{3} \right)^2$

b) $B = \underbrace{111\dots1}_n \underbrace{555\dots5}_{n-1} 6$ (có n số 1 và n-1 số 5)

$B = \underbrace{111\dots1}_n \underbrace{555\dots5}_n + 1 = \underbrace{111\dots1}_n \cdot 10^n + \underbrace{555\dots5}_n + 1 = \underbrace{111\dots1}_n \cdot 10^n + 5 \left(\underbrace{111\dots1}_n \right) + 1$

Đặt $\underbrace{11\dots1}_n = a$ thì $10^n = 9a + 1$ nên

$B = a(9a + 1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2 = \underbrace{33\dots34}_{n-1}^2$

c) $C = \underbrace{11\dots1}_{2n} + \underbrace{44\dots4}_n + 1$

Đặt $a = \underbrace{11\dots1}_n$ Thì $C = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{11\dots1}_n + 4 \cdot \underbrace{11\dots1}_n + 1 = a \cdot 10^n + a + 4a + 1$

$= a(9a + 1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$

d) $D = \underbrace{99\dots98}_{n-1} \underbrace{00\dots01}_n$. Đặt $\underbrace{99\dots9}_n = a \Rightarrow 10^n = a + 1$

$D = \underbrace{99\dots9}_n \cdot 10^{n+2} + 8 \cdot 10^{n+1} + 1 = a \cdot 100 \cdot 10^n + 80 \cdot 10^n + 1$

$= 100a(a + 1) + 80(a + 1) + 1 = 100a^2 + 180a + 81 = (10a + 9)^2 = \left(\underbrace{99\dots9}_{n+1} \right)^2$

e) $E = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{22\dots2}_{n+1} 5 = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{22\dots2}_{n+1} 00 + 25 = \underbrace{11\dots1}_n \cdot 10^{n+2} + 2 \cdot \underbrace{11\dots1}_n 100 + 25$

$$= [a(9a + 1) + 2a]100 + 25 = 900a^2 + 300a + 25 = (30a + 5)^2 = (\underbrace{33\dots3}_n 5)^2$$

f) $F = \underbrace{44\dots4}_{100} = 4 \cdot \underbrace{11\dots1}_{100}$ là số chính phương thì $\underbrace{11\dots1}_{100}$ là số chính phương

Số $\underbrace{11\dots1}_{100}$ là số lẻ nên nó là số chính phương thì chia cho 4 phải dư 1

Thật vậy: $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ chia 4 dư 1

$\underbrace{11\dots1}_{100}$ có hai chữ số tận cùng là 11 nên chia cho 4 thì dư 3

vậy $\underbrace{11\dots1}_{100}$ không là số chính phương nên $F = \underbrace{44\dots4}_{100}$ không là số chính phương

Bài 4:

a) Cho các số $A = \underbrace{11\dots11}_{2m}$; $B = \underbrace{11\dots11}_{m+1}$; $C = \underbrace{66\dots66}_m$

CMR: $A + B + C + 8$ là số chính phương.

Ta có: $A = \frac{10^{2m} - 1}{9}$; $B = \frac{10^{m+1} - 1}{9}$; $C = 6 \cdot \frac{10^m - 1}{9}$ Nên:

$$A + B + C + 8 = \frac{10^{2m} - 1}{9} + \frac{10^{m+1} - 1}{9} + 6 \cdot \frac{10^m - 1}{9} + 8 = \frac{10^{2m} - 1 + 10^{m+1} - 1 + 6(10^m - 1) + 72}{9}$$

$$= \frac{10^{2m} - 1 + 10 \cdot 10^m - 1 + 6 \cdot 10^m - 6 + 72}{9} = \frac{(10^m)^2 + 16 \cdot 10^m + 64}{9} = \left(\frac{10^m + 8}{3} \right)^2$$

b) CMR: Với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$ thì $A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là số chính phương.

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4 \\ &= (x^2 + 5xy + 4y^2)[(x^2 + 5xy + 4y^2) + 2y^2] + y^4 \\ &= (x^2 + 5xy + 4y^2)^2 + 2(x^2 + 5xy + 4y^2) \cdot y^2 + y^4 = [(x^2 + 5xy + 4y^2) + y^2]^2 \\ &= (x^2 + 5xy + 5y^2)^2 \end{aligned}$$

Bài 5: Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương

a) $n^2 - n + 2$

b) $n^5 - n + 2$

Giải

a) Với $n = 1$ thì $n^2 - n + 2 = 2$ không là số chính phương

Với $n = 2$ thì $n^2 - n + 2 = 4$ là số chính phương

Với $n > 2$ thì $n^2 - n + 2$ không là số chính phương Vì

$$(n - 1)^2 = n^2 - (2n - 1) < n^2 - (n - 2) < n^2$$

b) Ta có $n^5 - n$ chia hết cho 5 Vì

$$n^5 - n = (n^2 - 1) \cdot n \cdot (n^2 + 1)$$

Với $n = 5k$ thì n chia hết cho 5

Với $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 5

Với $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5

Nên $n^5 - n + 2$ chia cho 5 thì dư 2 nên $n^5 - n + 2$ có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên

$n^5 - n + 2$ không là số chính phương

Vậy: Không có giá trị nào của n thỏa mãn bài toán

Bài 6 :

- a) Chứng minh rằng : Mọi số lẻ đều viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương
b) Một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn

Mọi số lẻ đều có dạng $a = 4k + 1$ hoặc $a = 4k + 3$

Với $a = 4k + 1$ thì $a = 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 = (2k + 1)^2 - (2k)^2$

Với $a = 4k + 3$ thì $a = (4k^2 + 8k + 4) - (4k^2 + 4k + 1) = (2k + 2)^2 - (2k + 1)^2$

b) A là số chính phương có chữ số tận cùng bằng 9 nên

$$A = (10k \pm 3)^2 = 100k^2 \pm 60k + 9 = 10 \cdot (10k^2 \pm 6k) + 9$$

Số chục của A là $10k^2 \pm 6k$ là số chẵn (đpcm)

Bài 7:

Một số chính phương có chữ số hàng chục là chữ số lẻ. Tìm chữ số hàng đơn vị

Giải
Gọi $n^2 = (10a + b)^2 = 10 \cdot (10a^2 + 2ab) + b^2$ nên chữ số hàng đơn vị cần tìm là chữ số tận cùng của b^2

Theo đề bài , chữ số hàng chục của n^2 là chữ số lẻ nên chữ số hàng chục của b^2 phải lẻ
Xét các giá trị của b từ 0 đến 9 thì chỉ có $b^2 = 16, b^2 = 36$ có chữ số hàng chục là chữ số lẻ, chúng đều tận cùng bằng 6

Vậy : n^2 có chữ số hàng đơn vị là 6

*** Bài tập về nhà:**

Bài 1: Các số sau đây, số nào là số chính phương

a) $A = \underbrace{22\dots2}_5 4$

b) $B = 11115556$

c) $C = \underbrace{99\dots9}_n \underbrace{00\dots0}_n 25$

d) $D = \underbrace{44\dots4}_n \underbrace{88\dots89}_{n-1}$

e) $M = \underbrace{11\dots1}_{2n} - \underbrace{22\dots2}_n$

f) $N = 1^2 + 2^2 + \dots + 56^2$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để các biểu thức sau là số chính phương

a) $n^3 - n + 2$

b) $n^4 - n + 2$

Bài 3: Chứng minh rằng

a) Tổng của hai số chính phương lẻ không là số chính phương

b) Một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ

Bài 4: Một số chính phương có chữ số hàng chục bằng 5. Tìm chữ số hàng đơn vị

www.vnmath.com

CHUYÊN ĐỀ 6 – ĐỒNG DƯ THỨC

A. ĐỊNH NGHĨA:

Nếu hai số nguyên a và b có cùng số dư trong phép chia cho một số tự nhiên $m \neq 0$ thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m , và có đồng dư thức: $a \equiv b \pmod{m}$

Ví dụ: $7 \equiv 10 \pmod{3}$, $12 \equiv 22 \pmod{10}$

+ Chú ý: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b : m$

B. TÍNH CHẤT:

1. Tính chất phản xạ: $a \equiv a \pmod{m}$

2. Tính chất đối xứng: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$

3. Tính chất bắc cầu: $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$ thì $a \equiv c \pmod{m}$

4. Cộng, trừ từng vế: $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

Hệ quả:

a) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$

b) $a + b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c - b \pmod{m}$

c) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + km \equiv b \pmod{m}$

5. Nhân từng vế: $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

Hệ quả:

a) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ ($c \in \mathbb{Z}$)

b) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

6. Có thể nhân (chia) hai vế và môđun của một đồng dư thức với một số nguyên dương

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$$

Chẳng hạn: $11 \equiv 3 \pmod{4} \Leftrightarrow 22 \equiv 6 \pmod{8}$

7. $\begin{cases} ac \equiv bc \pmod{m} \\ (c, m) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

Chẳng hạn: $\begin{cases} 16 \equiv 2 \pmod{7} \\ (2, 7) = 1 \end{cases} \Rightarrow 8 \equiv 1 \pmod{7}$

C. CÁC VÍ DỤ:

1. Ví dụ 1:

Tìm số dư khi chia 92^{94} cho 15

Giải

Ta thấy $92 \equiv 2 \pmod{15} \Rightarrow 92^{94} \equiv 2^{94} \pmod{15}$ (1)

Lại có $2^4 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (2^4)^{23} \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{15}$ hay $2^{94} \equiv 4 \pmod{15}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $92^{94} \equiv 4 \pmod{15}$ tức là 92^{94} chia 15 thì dư 4

2. Ví dụ 2:

Chứng minh: trong các số có dạng $2^n - 4$ ($n \in \mathbb{N}$), có vô số số chia hết cho 5

Thật vậy:

$$\text{Từ } 2^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2^{4k} \equiv 1 \pmod{5} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } 2^2 \equiv 4 \pmod{5} \quad (2)$$

$$\text{Nhân (1) với (2), vế theo vế ta có: } 2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow 2^{4k+2} - 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

Hay $2^{4k+2} - 4$ chia hết cho 5 với mọi $k = 0, 1, 2, \dots$ hay ta được vô số số dạng $2^n - 4$ ($n \in \mathbb{N}$) chia hết cho 5

Chú ý: khi giải các bài toán về đồng dư, ta thường quan tâm đến $a \equiv \pm 1 \pmod{m}$

$$a \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv 1 \pmod{m}$$

$$a \equiv -1 \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv (-1)^n \pmod{m}$$

3. Ví dụ 3: Chứng minh rằng

a) $20^{15} - 1$ chia hết cho 11

b) $2^{30} + 3^{30}$ chi hết cho 13

c) $555^{222} + 222^{555}$ chia hết cho 7

Giải

$$\text{a) } 2^5 \equiv -1 \pmod{11} \quad (1); 10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^5 \equiv -1 \pmod{11} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2^5 \cdot 10^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\text{b) } 2^6 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} \equiv -1 \pmod{13} \quad (3)$$

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{30} \equiv 1 \pmod{13} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } 2^{30} + 3^{30} \equiv -1 + 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} + 3^{30} \equiv 0 \pmod{13}$$

Vậy: $2^{30} + 3^{30}$ chi hết cho 13

$$\text{c) } 555 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 555^{222} \equiv 2^{222} \pmod{7} \quad (5)$$

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow (2^3)^{74} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 555^{222} \equiv 1 \pmod{7} \quad (6)$$

$$222 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 222^{555} \equiv (-2)^{555} \pmod{7}$$

$$\text{Lại có } (-2)^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow [(-2)^3]^{185} \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 222^{555} \equiv -1 \pmod{7}$$

Ta suy ra $555^{222} + 222^{555} \equiv 1 - 1 \pmod{7}$ hay $555^{222} + 222^{555}$ chia hết cho 7

4. Ví dụ 4: Chứng minh rằng số $2^{2^{4n+1}} + 7$ chia hết cho 11 với mọi số tự nhiên n

Thật vậy: Ta có: $2^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

$$\text{Xét số dư khi chia } 2^{4n+1} \text{ cho 10. Ta có: } 2^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{4n} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$$

$$\text{Nên } 2^{2^{4n+1}} + 7 = 2^{10k+2} + 7 = 4 \cdot 2^{10k} + 7 = 4 \cdot (\text{BS } 11 + 1)^k + 7 = 4 \cdot (\text{BS } 11 + 1^k) + 7$$

$$= \text{BS } 11 + 11 \text{ chia hết cho 11}$$

Bài tập về nhà:

Bài 1: CMR:

a) $2^{28} - 1$ chia hết cho 29

b) Trong các số có dạng $2^n - 3$ có vô số số chia hết cho 13

Bài 2: Tìm số dư khi chia $A = 20^{11} + 22^{12} + 1996^{2009}$ cho 7.

CHUYÊN ĐỀ 7 – CÁC BÀI TOÁN VỀ BIỂU THỨC HỮU TỈ

A. Nhắc lại kiến thức:

Các bước rút gọn biểu thức hữu tỉ

- Tìm ĐKXD: Phân tích mẫu thành nhân tử, cho tất cả các nhân tử khác 0
- Phân tích tử thành nhân tử, chia tử và mẫu cho nhân tử chung

B. Bài tập:

Bài 1: Cho biểu thức $A = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$

- Rút gọn A
- tìm x để $A = 0$
- Tìm giá trị của A khi $|2x-1|=7$

Giải

a) Đkxd :

$$x^4 - 10x^2 + 9 \neq 0 \Leftrightarrow [(x^2)^2 - x^2] - (9x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$$

$$\text{Tử: } x^4 - 5x^2 + 4 = [(x^2)^2 - x^2] - (x^2 - 4) = x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

$$\text{Với } x \neq \pm 1; x \neq \pm 3 \text{ thì } A = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)}$$

$$\text{b) } A = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\text{c) } |2x - 1| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 7 \\ 2x - 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ 2x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$* \text{ Với } x = 4 \text{ thì } A = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{(4 - 2)(4 + 2)}{(4 - 3)(4 + 3)} = \frac{12}{7}$$

* Với $x = -3$ thì A không xác định

2. Bài 2:

Cho biểu thức $B = \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

- Rút gọn B
- Tìm x để $B > 0$

Giải

$$\text{a) Phân tích mẫu: } 3x^3 - 19x^2 + 33x - 9 = (3x^3 - 9x^2) - (10x^2 - 30x) + (3x - 9)$$

$$= (x - 3)(3x^2 - 10x + 3) = (x - 3)[(3x^2 - 9x) - (x - 3)] = (x - 3)^2(3x - 1)$$

$$\text{Đkxd: } (x - 3)^2(3x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ và } x \neq \frac{1}{3}$$

b) Phân tích tử, ta có:

$$2x^3 - 7x^2 - 12x + 45 = (2x^3 - 6x^2) - (x^2 - 3x) - (15x - 45) = (x - 3)(2x^2 - x - 15)$$

$$= (x - 3)[(2x^2 - 6x) + (5x - 15)] = (x - 3)^2(2x + 5)$$

Với $x \neq 3$ và $x \neq \frac{1}{3}$

$$\text{Thì } B = \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9} = \frac{(x - 3)^2(2x + 5)}{(x - 3)^2(3x - 1)} = \frac{2x + 5}{3x - 1}$$

$$c) B > 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 5}{3x - 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 2x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ 2x + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

3. Bài 3

Cho biểu thức $C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức C

b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên

Giải

a) Đkxđ: $x \neq \pm 1$

$$C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1} = \left[\frac{1+x+2(1-x)-5}{(1-x)(1+x)} \right] \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{1-2x} = \frac{-2}{2x-1}$$

b) B có giá trị nguyên khi x là số nguyên thì $\frac{-2}{2x-1}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2x - 1 \text{ là Ư}(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=1,5 \\ x=-1 \end{cases}$$

Đối chiếu Đkxđ thì chỉ có $x = 0$ thoả mãn

4. Bài 4

Cho biểu thức $D = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x|x+2| - x^2 + 4}$

a) Rút gọn biểu thức D

b) Tìm x nguyên để D có giá trị nguyên

c) Tìm giá trị của D khi $x = 6$

Giải

a) Nếu $x + 2 > 0$ thì $|x+2| = x + 2$ nên

$$D = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x|x+2| - x^2 + 4} = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x(x+2) - x^2 + 4} = \frac{x(x-1)(x+2)}{x(x+2) - (x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

Nếu $x + 2 < 0$ thì $|x+2| = -(x + 2)$ nên

$$D = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x|x+2| - x^2 + 4} = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{-x(x+2) - x^2 + 4} = \frac{x(x-1)(x+2)}{-x(x+2) - (x-2)(x+2)} = \frac{-x}{2}$$

Nếu $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ thì biểu thức D không xác định

b) Để D có giá trị nguyên thì $\frac{x^2 - x}{2}$ hoặc $\frac{-x}{2}$ có giá trị nguyên

$$+) \frac{x^2 - x}{2} \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x : 2 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) : 2 \\ x > -2 \end{cases}$$

Vì $x(x-1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 với mọi $x > -2$

$$+) \frac{-x}{2} \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} x : 2 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k \text{ (} k \in \mathbb{Z}; k < -1 \text{)}$$

$$c) \text{ Khi } x = 6 \Rightarrow x > -2 \text{ nên } D = \frac{x^2 - x}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

* Dạng 2: Các biểu thức có tính quy luật

Bài 1: Rút gọn các biểu thức

$$a) A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

Phương pháp: Xuất phát từ hạng tử cuối để tìm ra quy luật

$$\text{Ta có } \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ Nên}$$

$$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{(n+1)^2}$$

$$b) B = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Ta có } 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k+1)(k-1)}{k^2} \text{ Nên}$$

$$B = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1.3.2.4 \dots (n-1)(n+1)}{2^2.3^2.4^2 \dots n^2} = \frac{1.2.3 \dots (n-1)}{2.3.4 \dots (n-1)n} \cdot \frac{3.4.5 \dots (n+1)}{2.3.4 \dots n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$c) C = \frac{150}{5.8} + \frac{150}{8.11} + \frac{150}{11.14} + \dots + \frac{150}{47.50} = 150 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{47} - \frac{1}{50} \right) \\ = 50 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{50} \right) = 50 \cdot \frac{9}{10} = 45$$

$$d) D = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{n(n+1)} \right] = \frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$$

Bài 2:

$$a) \text{ Cho } A = \frac{m-1}{1} + \frac{m-2}{2} + \dots + \frac{2}{m-2} + \frac{1}{n-1}; B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}. \text{ Tính } \frac{A}{B}$$

Ta có

$$A = \left(\frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-1} \right) - \left(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n-1} \right) = n \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \right) - (n-1)$$

$$= n \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \right) + 1 = n \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \right) = nB \Rightarrow \frac{A}{B} = n$$

b) $A = \frac{1}{1 \cdot (2n-1)} + \frac{1}{3 \cdot (2n-3)} + \dots + \frac{1}{(2n-3) \cdot 3} + \frac{1}{(2n-1) \cdot 1}$; $B = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}$

Tính A : B

Giải

$$A = \frac{1}{2n} \left[\left(1 + \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n-3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2n} \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \dots + \frac{1}{3} + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} \right) = \frac{1}{2n} \cdot 2 \cdot B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1}{n}$$

Bài tập về nhà

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$

b) $\frac{1^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{4^2-1} \cdot \frac{5^2}{6^2-1} \dots \frac{n^2}{(n+1)^2-1}$

c) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

* **Dạng 3: Rút gọn; tính giá trị biểu thức thoả mãn điều kiện của biến**

Bài 1: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$; b) $B = x^3 + \frac{1}{x^3}$; c) $C = x^4 + \frac{1}{x^4}$; d) $D = x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Lời giải

a) $A = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$;

b) $B = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^3 - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right) = 27 - 9 = 18$;

c) $C = x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 2 = 49 - 2 = 47$;

d) $A \cdot B = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) = x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^5} = D + 3 \Rightarrow D = 7 \cdot 18 - 3 = 123$.

Bài 2: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$ (1); $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ (2).

Tính giá trị biểu thức $D = \left(\frac{a}{x} \right)^2 + \left(\frac{b}{y} \right)^2 + \left(\frac{c}{z} \right)^2$

Từ (1) suy ra $bcx + acy + abz = 0$ (3)

Từ (2) suy ra

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right) = 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 = 4 - 2 \cdot \left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right) \quad (4)$$

Thay (3) vào (4) ta có $D = 4 - 2 \cdot 0 = 4$

Bài 3

a) Cho $abc = 2$; rút gọn biểu thức $A = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{2c}{ac+2c+2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{a}{ab+a+2} + \frac{ab}{abc+ab+a} + \frac{2c}{ac+2c+2} = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{ab}{2+ab+a} + \frac{2c}{ac+2c+abc} \\ &= \frac{a}{ab+a+2} + \frac{ab}{2+ab+a} + \frac{2c}{c(a+2+ab)} = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{ab}{2+ab+a} + \frac{2}{a+2+ab} = \frac{ab+a+2}{ab+a+2} = 1 \end{aligned}$$

b) Cho $a + b + c = 0$; rút gọn biểu thức $B = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - b^2 - a^2}$

Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -(b + c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$

Tương tự ta có: $b^2 - a^2 - c^2 = 2ac$; $c^2 - b^2 - a^2 = 2ab$ (Hoán vị vòng quanh), nên

$$B = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a + b + c = 0 &\Rightarrow -a = (b + c) \Rightarrow -a^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b + c) \Leftrightarrow -a^3 = b^3 + c^3 - 3abc \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \quad (2) \end{aligned}$$

Thay (2) vào (1) ta có $B = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} = \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2}$ (Vì $abc \neq 0$)

c) Cho a, b, c từng đôi một khác nhau thoả mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Rút gọn biểu thức $C = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Từ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + ac + bc = 0$

$$\Rightarrow a^2 + 2bc = a^2 + 2bc - (ab + ac + bc) = a^2 - ab + bc - ac = (a - b)(a - c)$$

Tương tự: $b^2 + 2ac = (b - a)(b - c)$; $c^2 + 2ab = (c - a)(c - b)$

$$\begin{aligned} C &= \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)} = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} - \frac{b^2}{(a - b)(b - c)} + \frac{c^2}{(a - c)(b - c)} \\ &= \frac{a^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} - \frac{b^2(a - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} + \frac{c^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = 1 \end{aligned}$$

* Dạng 4: Chứng minh đẳng thức thoả mãn điều kiện của biến

1. Bài 1: Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ (1); $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$ (2).

Chứng minh rằng: $a + b + c = abc$

Từ (1) suy ra

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = 4 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = 4 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = 1 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 1 \Leftrightarrow a + b + c = abc$$

2. Bài 2: Cho $a, b, c \neq 0$ và $a + b + c \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau.

Từ đó suy ra rằng: $\frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{b^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}}$.

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0$

$\Leftrightarrow (a+b) \cdot \frac{c(a+b+c) + ab}{abc(a+b+c)} = 0 \hat{=} (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \hat{=} \begin{cases} a+b=0 & \hat{=} a=-b \\ b+c=0 & \hat{=} b=-c \\ c+a=0 & \hat{=} c=-a \end{cases}$

Từ đó suy ra: $\frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{b^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{(-c)^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009}}$

$\frac{1}{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009} + (-c)^{2009} + c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009}}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{b^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}}$.

3. Bài 3: Cho $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ (1)

chứng minh rằng: trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau

Từ (1) $\Rightarrow a^2c + ab^2 + bc^2 = b^2c + ac^2 + a^2b \Rightarrow a^2(b-c) - a(c^2 - b^2) + bc(c-b) = 0$

$\Rightarrow (c-b)(a^2 - ac + ab + bc) = 0 \Rightarrow (c-b)(a-b)(a-c) = 0 \Rightarrow \text{đpcm}$

4. Bài 4: Cho $(a^2 - bc)(b - abc) = (b^2 - ac)(a - abc)$; $abc \neq 0$ và $a \neq b$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$

Từ GT $\Rightarrow a^2b - b^2c - a^3bc + ab^2c^2 = ab^2 - a^2c - ab^3c + a^2bc^2$

$\Leftrightarrow (a^2b - ab^2) + (a^2c - b^2c) = abc^2(a-b) + abc(a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow (a-b)(ab + ac + bc) = abc(a-b)(a+b+c)$

$\Leftrightarrow \frac{ab + ac + bc}{abc} = a + b + c \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$

5. Bài 5:

Cho $a + b + c = x + y + z = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

Từ $x + y + z = 0 \Rightarrow x^2 = (y+z)^2; y^2 = (x+z)^2; z^2 = (y+x)^2$

$\Rightarrow ax^2 + by^2 + cz^2 = a(y+z)^2 + b(x+z)^2 + c(y+x)^2 = \dots$

$= (b+c)x^2 + (a+c)y^2 + (a+b)z^2 + 2(ayz + bxz + cxy)$ (1)

Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow -a = b + c; -b = a + c; -c = a + b$ (2)

Từ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0$ (3). Thay (2), (3) vào (1); ta có:

$ax^2 + by^2 + cz^2 = -(ax^2 + by^2 + cz^2) \Rightarrow ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

6. Bài 6:

Cho $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$; chứng minh: $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$

Từ $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b-c} = \frac{b}{a-c} + \frac{c}{b-a} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (1) (Nhân hai vế với $\frac{1}{b-c}$)

Tương tự, ta có: $\frac{b}{(c-a)^2} = \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (2); $\frac{c}{(a-b)^2} = \frac{a^2 - ac + cb - b^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (3)

Cộng từng vế (1), (2) và (3) ta có đpcm

7. Bài 7:

Cho $a + b + c = 0$; chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9$ (1)

Đặt $\frac{a-b}{c} = x$; $\frac{b-c}{a} = y$; $\frac{c-a}{b} = z \Rightarrow \frac{c}{a-b} = \frac{1}{x}$; $\frac{a}{b-c} = \frac{1}{y}$; $\frac{b}{c-a} = \frac{1}{z}$

(1) $\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 9$

Ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z}\right)$ (2)

Ta lại có: $\frac{y+z}{x} = \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)} = \frac{c(c-a-b)}{ab}$
 $= \frac{c[2c - (a+b+c)]}{ab} = \frac{2c^2}{ab}$ (3)

Tương tự, ta có: $\frac{x+z}{y} = \frac{2a^2}{bc}$ (4); $\frac{x+y}{z} = \frac{2b^2}{ac}$ (5)

Thay (3), (4) và (5) vào (2) ta có:

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = 3 + \frac{2}{abc}(a^3 + b^3 + c^3)$ (6)

Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (7) ?

Thay (7) vào (6) ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{2}{abc} \cdot 3abc = 3 + 6 = 9$

Bài tập về nhà:

Bài 1:

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2-x}{x+3} - \frac{3-x}{x+2} + \frac{2-x}{x^2+5x+6}\right) : \left(1 - \frac{x}{x-1}\right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để $A = 0$; $A > 0$

Bài 2:

Cho biểu thức $B = \frac{3y^3 - 7y^2 + 5y - 1}{2y^3 - y^2 - 4y + 3}$

a) Rút gọn B

b) Tìm số nguyên y để $\frac{2D}{2y+3}$ có giá trị nguyên

c) Tìm số nguyên y để $B \geq 1$

Bài 3 :

cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$; tính giá trị biểu thức $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

HD: $A = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}$; vận dụng $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Bài 4:

Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$; Tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{b}{c} + 1\right)\left(\frac{c}{a} + 1\right)$

Bài 5:

Cho $x + y + z = 0$; chứng minh rằng: $\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + 3 = 0$

Bài 6:

Cho $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$; $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Chứng minh $xy + yz + xz = 0$

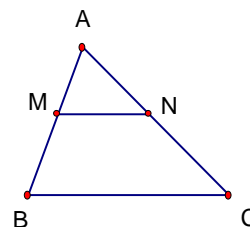
www.vnmath.com

CHUYÊN ĐỀ 8 - CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐỊNH LÝ TA-LÉT

A. Kiến thức:

1. Định lý Ta-lét:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ MN \parallel BC \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



$$\text{* Hệ quả: } MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

B. Bài tập áp dụng:

1. Bài 1:

Cho tứ giác ABCD, đường thẳng qua A song song với BC cắt BD ở E, đường thẳng qua B song song với AD cắt AC ở G

a) chứng minh: $EG \parallel CD$

b) Giả sử $AB \parallel CD$, chứng minh rằng $AB^2 = CD \cdot EG$

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\text{a) Vì } AE \parallel BC \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \quad (1)$$

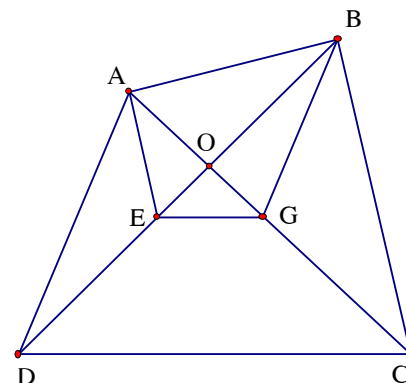
$$BG \parallel AC \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OG}{OA} \quad (2)$$

$$\text{Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: } \frac{OE}{OD} = \frac{OG}{OC} \Rightarrow EG \parallel$$

CD

b) Khi $AB \parallel CD$ thì $EG \parallel AB \parallel CD$, $BG \parallel AD$ nên

$$\frac{AB}{EG} = \frac{OA}{OG} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{EG} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EG$$



Bài 2:

Cho ABC vuông tại A, Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACF vuông cân ở C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF. Chứng minh rằng:

a) $AH = AK$

b) $AH^2 = BH \cdot CK$

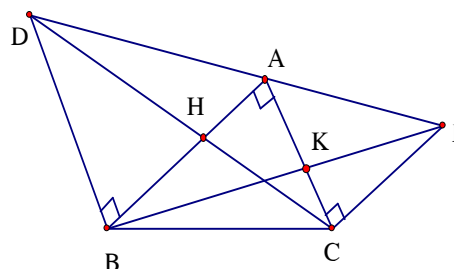
Giải

Đặt $AB = c$, $AC = b$.

$BD \parallel AC$ (cùng vuông góc với AB)

$$\text{nên } \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB + AH} = \frac{b}{b + c}$$

$$\text{Hay } \frac{AH}{AB} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow AH = \frac{b \cdot c}{b + c} \quad (1)$$



$AB \parallel CF$ (cùng vuông góc với AC) nên $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC+AK} = \frac{c}{b+c}$

Hay $\frac{AK}{AC} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow AK = \frac{b \cdot c}{b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH = AK$

b) Từ $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c}$ và $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b}$ suy ra $\frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AK} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AH}$ (Vì $AH = AK$)

$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot KC$

3. Bài 3: Cho hình bình hành $ABCD$, đường thẳng a đi qua A lần lượt cắt BD , BC , DC theo thứ tự tại E , K , G . Chứng minh rằng:

a) $AE^2 = EK \cdot EG$

b) $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$

c) Khi đường thẳng a thay đổi vị trí nhưng vẫn qua A thì tích $BK \cdot DG$ có giá trị không đổi

Giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành và $K \in BC$ nên

$AD \parallel BK$, theo hệ quả của định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow \frac{EK}{AE} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow AE^2 = EK \cdot EG$$

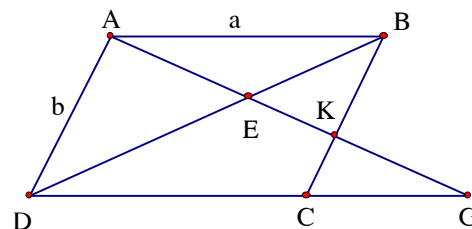
b) Ta có: $\frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}$; $\frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$ nên

$$\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD} + \frac{DE}{DB} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow AE \left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} \text{ (đpcm)}$$

c) Ta có: $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CG} \Rightarrow \frac{BK}{KC} = \frac{a}{CG}$ (1); $\frac{KC}{AD} = \frac{CG}{DG} \Rightarrow \frac{KC}{b} = \frac{CG}{DG}$ (2)

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: $\frac{BK}{b} = \frac{a}{DG} \Rightarrow BK \cdot DG = ab$ không đổi (Vì $a = AB$; $b =$

AD là độ dài hai cạnh của hình bình hành $ABCD$ không đổi)



4. Bài 4:

Cho tứ giác $ABCD$, các điểm E , F , G , H theo thứ tự chia trong các cạnh AB , BC , CD , DA theo tỉ số 1:2. Chứng minh rằng:

a) $EG = FH$

b) EG vuông góc với FH

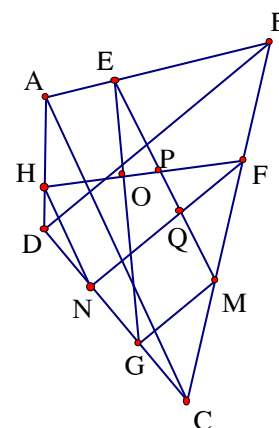
Giải

Gọi M , N theo thứ tự là trung điểm của CF , DG

$$\text{Ta có } CM = \frac{1}{2} CF = \frac{1}{3} BC \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow EM \parallel AC \Rightarrow \frac{EM}{AC} = \frac{BM}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow EM = \frac{2}{3} AC \text{ (1)}$$

$$\text{Tương tự, ta có: } NF \parallel BD \Rightarrow \frac{NF}{BD} = \frac{CF}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow NF = \frac{2}{3} BD \text{ (2)}$$



mà $AC = BD$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : $EM = NF$ (a)

Tương tự như trên ta có: $MG \parallel BD$, $NH \parallel AC$ và $MG = NH = \frac{1}{3}AC$ (b)

Mặt khác $EM \parallel AC$; $MG \parallel BD$ và $AC \perp BD \Rightarrow EM \perp MG \Rightarrow \widehat{EMG} = 90^\circ$ (4)

Tương tự, ta có: $\widehat{FNH} = 90^\circ$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{EMG} = \widehat{FNH} = 90^\circ$ (c)

Từ (a), (b), (c) suy ra $\triangle EMG = \triangle FNH$ (c.g.c) $\Rightarrow EG = FH$

b) Gọi giao điểm của EG và FH là O ; của EM và FH là P ; của EM và FN là Q thì

$\widehat{PQF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{QPF} + \widehat{QFP} = 90^\circ$ mà $\widehat{QPF} = \widehat{QPE}$ (đối đỉnh), $\widehat{QEP} = \widehat{QFP}$ ($\triangle EMG = \triangle FNH$)

Suy ra $\widehat{EOP} = \widehat{PQF} = 90^\circ \Rightarrow EO \perp OP \Rightarrow EG \perp FH$

5. Bài 5:

Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ CD . Từ D vẽ đường thẳng song song với BC , cắt AC tại M và AB tại K , Từ C vẽ đường thẳng song song với AD , cắt AB tại F , qua F ta lại vẽ đường thẳng song song với AC , cắt BC tại P . Chứng minh rằng

a) $MP \parallel AB$

b) Ba đường thẳng MP , CF , DB đồng quy

Giải

$$a) EP \parallel AC \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB} \quad (1)$$

$$AK \parallel CD \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} \quad (2)$$

các tứ giác $AFCD$, $DCBK$ là các hình bình hành nên $AF = DC$, $FB = AK$ (3)

$$\text{Kết hợp (1), (2) và (3) ta có } \frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} \Rightarrow MP \parallel AB$$

(Định lí Ta-lét đảo) (4)

$$b) \text{ Gọi } I \text{ là giao điểm của } BD \text{ và } CF, \text{ ta có: } \frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} =$$

$$\frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB}$$

$$\text{Mà } \frac{DC}{FB} = \frac{DI}{IB} \text{ (Do } FB \parallel DC) \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{DI}{IB} \Rightarrow IP \parallel DC \parallel AB \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra : qua P có hai đường thẳng IP , PM cùng song song với $AB \parallel DC$ nên theo tiên đề Ôclít thì ba điểm P , I , M thẳng hàng hay MP đi qua giao điểm của CF và DB hay ba đường thẳng MP , CF , DB đồng quy

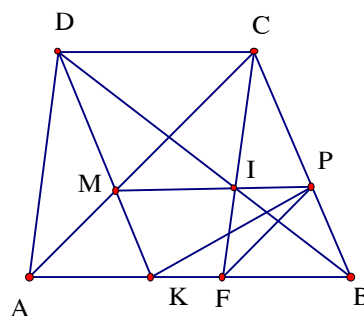
6. Bài 6:

Cho $\triangle ABC$ có $BC < BA$. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác BE của \widehat{ABC} ; đường thẳng này cắt BE tại F và cắt trung tuyến BD tại G . Chứng minh rằng đoạn thẳng EG bị đoạn thẳng DF chia làm hai phần bằng nhau

Giải

Gọi K là giao điểm của CF và AB ; M là giao điểm của DF và BC

$\triangle KBC$ có BF vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle KBC$ cân tại $B \Rightarrow BK = BC$ và $FC = FK$



Mặt khác D là trung điểm AC nên DF là đường trung bình của $\triangle AKC \Rightarrow DF \parallel AK$ hay $DM \parallel AB$

Suy ra M là trung điểm của BC

$DF = \frac{1}{2} AK$ (DF là đường trung bình của $\triangle AKC$), ta có

$$\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} \quad (\text{do } DF \parallel BK) \Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK} \quad (1)$$

Mặt khác $\frac{CE}{DE} = \frac{DC - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$ (Vì $AD = DC$)

$$\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$$

Hay $\frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} - 1 = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2$ (vì $\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DF}$: Do $DF \parallel AB$)

$$\text{Suy ra } \frac{CE}{DE} = \frac{AK + BK}{DE} - 2 = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2 \quad (\text{Do } DF = \frac{1}{2} AK) \Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2 = \frac{2BK}{AK}$$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow EG \parallel BC$

Gọi giao điểm của EG và DF là O ta có $\frac{OG}{MC} = \frac{OE}{MB} \left(= \frac{FO}{FM} \right) \Rightarrow OG = OE$

Bài tập về nhà

Bài 1:

Cho tứ giác ABCD, AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với BC cắt AB ở E; đường thẳng song song với CD qua O cắt AD tại F

a) Chứng minh $FE \parallel BD$

b) Từ O kẻ các đường thẳng song song với AB, AD cắt BD, CD tại G và H.

Chứng minh: $CG \cdot DH = BG \cdot CH$

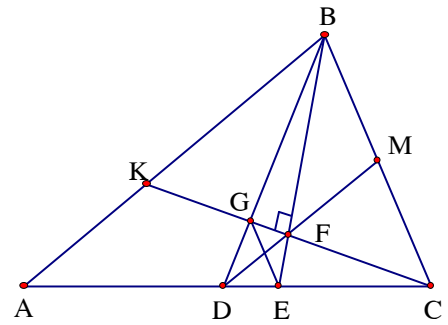
Bài 2:

Cho hình bình hành ABCD, điểm M thuộc cạnh BC, điểm N thuộc tia đối của tia BC sao cho $BN = CM$; các đường thẳng DN, DM cắt AB theo thứ tự tại E, F.

Chứng minh:

a) $AE^2 = EB \cdot FE$

b) $EB = \left(\frac{AN}{DF} \right)^2 \cdot EF$



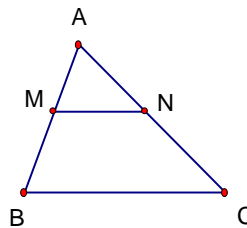
CHUYÊN ĐỀ 9 – CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ TALÉT VÀ TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

A. Kiến thức:

1. Định lý Ta-lét:

* Định lý Talét $\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ MN // BC \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

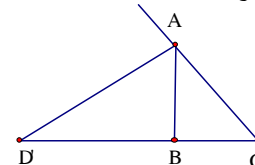
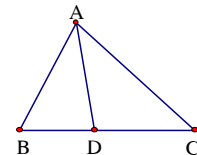
* Hệ quả: $MN // BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



2. Tính chất đường phân giác:

$\triangle ABC$, AD là phân giác góc A $\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

AD' là phân giác góc ngoài tại A: $\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC}$



B. Bài tập vận dụng

1. Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$, phân giác AD

a) Tính độ dài BD, CD

b) Tia phân giác BI của góc B cắt AD ở I; tính tỉ số: $\frac{AI}{ID}$

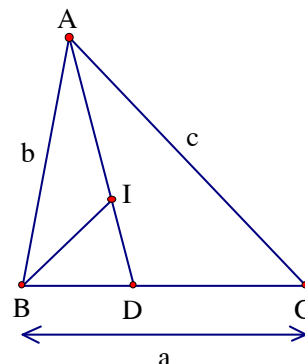
Giải

a) AD là phân giác của $\sphericalangle BAC$ nên $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

$\Rightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b + c}$

Do đó $CD = a - \frac{ac}{b + c} = \frac{ab}{b + c}$

b) BI là phân giác của $\sphericalangle ABC$ nên $\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = c : \frac{ac}{b + c} = \frac{b + c}{a}$



2. Bài 2:

Cho $\triangle ABC$, có $\sphericalangle B < 60^\circ$ phân giác AD

a) Chứng minh $AD < AB$

b) Gọi AM là phân giác của $\triangle ADC$. Chứng minh rằng $BC > 4 DM$

Giải

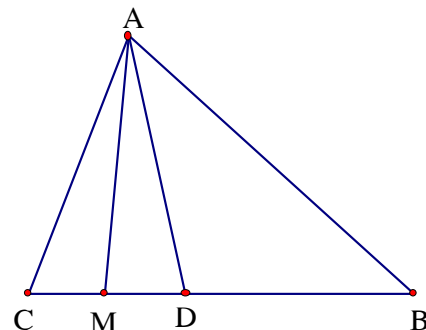
a) Ta có $\sphericalangle ADB = \sphericalangle C + \frac{\sphericalangle A}{2} > \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle C}{2} = \frac{180^\circ - \sphericalangle B}{2} = 60^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle ADB > \sphericalangle B \Rightarrow AD < AB$

b) Gọi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = d$

Trong $\triangle ADC$, AM là phân giác ta có

$\frac{DM}{CM} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{DM}{CM + DM} = \frac{AD}{AD + AC} \Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{AD}{AD + AC}$



$$\Rightarrow DM = \frac{CD \cdot AD}{AD + AC} = \frac{CD \cdot d}{b + d}; CD = \frac{ab}{b + c} \text{ (Vận dụng bài 1) } \Rightarrow DM = \frac{abd}{(b + c)(b + d)}$$

Để c/m $BC > 4 DM$ ta c/m $a > \frac{4abd}{(b + c)(b + d)}$ hay $(b + d)(b + c) > 4bd$ (1)

Thật vậy : do $c > d \Rightarrow (b + d)(b + c) > (b + d)^2 \geq 4bd$. Bất đẳng thức (1) được c/m

Bài 3:

Cho ΔABC , trung tuyến AM , các tia phân giác của các góc AMB , AMC cắt AB , AC theo thứ tự ở D và E

a) Chứng minh $DE \parallel BC$

b) Cho $BC = a$, $AM = m$. Tính độ dài DE

c) Tìm tập hợp các giao điểm I của AM và DE nếu ΔABC có BC cố định, $AM = m$ không đổi

d) ΔABC có điều kiện gì thì DE là đường trung bình của nó

Giải

a) MD là phân giác của $\sphericalangle AMB$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}$ (1)

ME là phân giác của $\sphericalangle AMC$ nên $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}$ (2)

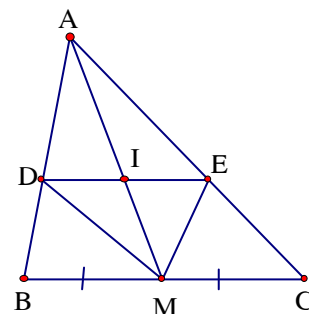
Từ (1), (2) và giả thiết $MB = MC$ ta suy ra $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$

b) $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AM}$. Đặt $DE = x \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{m - \frac{x}{2}}{m} \Rightarrow x = \frac{2a \cdot m}{a + 2m}$

c) Ta có: $MI = \frac{1}{2} DE = \frac{a \cdot m}{a + 2m}$ không đổi $\Rightarrow I$ luôn cách M một đoạn không đổi nên

tập hợp các điểm I là đường tròn tâm M , bán kính $MI = \frac{a \cdot m}{a + 2m}$ (Trừ giao điểm của nó với BC)

d) DE là đường trung bình của $\Delta ABC \Leftrightarrow DA = DB \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông ở A



4. Bài 4:

Cho ΔABC ($AB < AC$) các phân giác BD , CE

a) Đường thẳng qua D và song song với BC cắt AB ở K , chứng minh E nằm giữa B và K

b) Chứng minh: $CD > DE > BE$

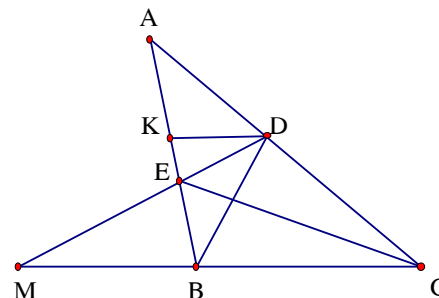
Giải

a) BD là phân giác nên

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} < \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AD}{DC} < \frac{AE}{EB} \text{ (1)}$$

Mặt khác $KD \parallel BC$ nên $\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{KB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KB} < \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AK + KB}{KB} < \frac{AE + EB}{EB} \Rightarrow \frac{AB}{KB} < \frac{AB}{EB} \Rightarrow KB > EB$



⇒ E nằm giữa K và B

b) Gọi M là giao điểm của DE và CB. Ta có $\widehat{EBD} = \widehat{KDB}$ (so le trong) ⇒ $\widehat{KBD} = \widehat{KDB}$
 mà E nằm giữa K và B nên $\widehat{KDB} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{KBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{EBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow EB < DE$

Ta lại có $\widehat{EBD} + \widehat{ECB} = \widehat{EDB} + \widehat{DEC} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{DCE}$ (Vì $\widehat{DCE} = \widehat{ECB}$)

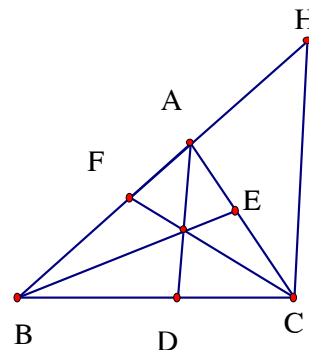
Suy ra: $CD > ED \Rightarrow CD > ED > BE$

5. Bài 5: Cho ΔABC . Ba đường phân giác AD, BE, CF.

Chứng minh

a. $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1.$

b. $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} > \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}.$



Giải

a) AD là đường phân giác của \widehat{BAC} nên ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

Tương tự: với các phân giác BE, CF ta có: $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}$ (2); $\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$

b) Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AD = d_a$.

Qua C kẻ đường thẳng song song với AD, cắt tia BA ở H.

Theo DL Talét ta có: $\frac{AD}{CH} = \frac{BA}{BH} \Rightarrow AD = \frac{BA \cdot CH}{BH} = \frac{c \cdot CH}{BA + AH} = \frac{c}{b + c} \cdot CH$

Do $CH < AC + AH = 2b$ nên: $d_a < \frac{2bc}{b+c} \Rightarrow \frac{1}{d_a} > \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{d_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{1}{d_b} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ và $\frac{1}{d_c} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ Nên:

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \Leftrightarrow \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (\text{đpcm})$$

Bài tập về nhà

Cho ΔABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ($b > c$), các phân giác BD, CE

a) Tính độ dài CD, BE rồi suy ra $CD > BE$

b) Vẽ hình bình hành BEKD. Chứng minh: $CE > EK$

c) Chứng minh $CE > BD$

CHUYÊN ĐỀ 10 – CÁC BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. Kiến thức:

* Tam giác đồng dạng:

a) trường hợp thứ nhất: (c.c.c)

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

b) trường hợp thứ nhất: (c.g.c)

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} ; \hat{A} = \hat{A}'$$

c. Trường hợp đồng dạng thứ ba (g.g)

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'$$

AH; A'H' là hai đường cao tương ứng thì: $\frac{A'H'}{AH} = k$ (Tỉ số đồng dạng); $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$

B. Bài tập áp dụng

Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ có $\hat{B} = 2\hat{C}$, $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm.

a) Tính AC

b) Nếu ba cạnh của tam giác trên là ba số tự nhiên liên tiếp thì mỗi cạnh là bao nhiêu?

Giải

Cách 1:

Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho: $BD = BC$

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD = AB \cdot (AB + BD) = AB(AB + BC)$$

$$= 8(10 + 8) = 144 \Rightarrow AC = 12 \text{ cm}$$

Cách 2:

Vẽ tia phân giác BE của $\hat{A} \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACB$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{BE}{CB} = \frac{AE + BE}{AB + CB} = \frac{AC}{AB + CB} \Rightarrow AC^2 = AB(AB + CB) = 8(8 + 10) = 144$$

$$\Rightarrow AC = 12 \text{ cm}$$

b) Gọi $AC = b$, $AB = a$, $BC = c$ thì từ câu a ta có $b^2 = a(a + c)$ (1)

Vì $b > a$ nên có thể $b = a + 1$ hoặc $b = a + 2$

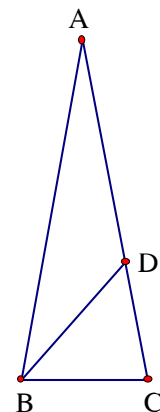
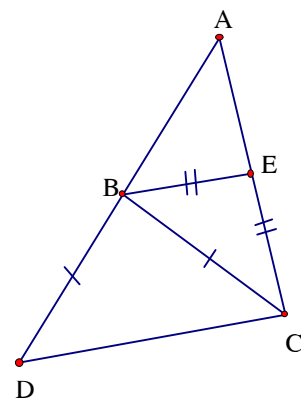
$$+ \text{ Nếu } b = a + 1 \text{ thì } (a + 1)^2 = a^2 + ac \Leftrightarrow 2a + 1 = ac \Leftrightarrow a(c - 2) = 1$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 2; c = 3 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Nếu } b = a + 2 \text{ thì } a(c - 4) = 4$$

$$- \text{ Với } a = 1 \text{ thì } c = 8 \text{ (loại)}$$

$$- \text{ Với } a = 2 \text{ thì } c = 6 \text{ (loại)}$$



- với $a = 4$ thì $c = 6$; $b = 5$

Vậy $a = 4$; $b = 5$; $c = 6$

Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường phân giác BD; tính BD biết $BC = 5$ cm; $AC = 20$ cm

Giải

Ta có $\frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow CD = 4$ cm và $BC = 5$ cm

Bài toán trở về bài 1

Bài 3:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A và O là trung điểm của BC. Một điểm O di động trên AB, lấy điểm E trên AC sao cho $CE = \frac{OB^2}{BD}$. Chứng minh rằng

- a) $\triangle DBO \sim \triangle OCE$
- b) $\triangle DOE \sim \triangle DBO \sim \triangle OCE$
- c) DO, EO lần lượt là phân giác của các góc BDE, CED
- d) khoảng cách từ O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB

Giải

a) Từ $CE = \frac{OB^2}{BD} \Rightarrow \frac{CE}{OB} = \frac{OB}{BD}$ và $\hat{B} = \hat{C}$ (gt) $\Rightarrow \triangle DBO \sim \triangle OCE$

b) Từ câu a suy ra $\hat{D}_3 = \hat{E}_2$ (1)

Vì B, O, C thẳng hàng nên $\hat{D}_3 + \hat{DOE} + \hat{EOC} = 180^\circ$ (2)

trong tam giác EOC thì $\hat{E}_2 + \hat{C} + \hat{EOC} = 180^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\hat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

$\triangle DOE$ và $\triangle DBO$ có $\frac{DO}{DB} = \frac{OE}{OC}$ (Do $\triangle DBO \sim \triangle OCE$)

và $\frac{DO}{DB} = \frac{OE}{OB}$ (Do $OC = OB$) và $\hat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

nên $\triangle DOE \sim \triangle DBO \sim \triangle OCE$

c) Từ câu b suy ra $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \Rightarrow DO$ là phân giác của các góc BDE

Cũng từ câu b suy ra $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 \Rightarrow EO$ là phân giác của các góc CED

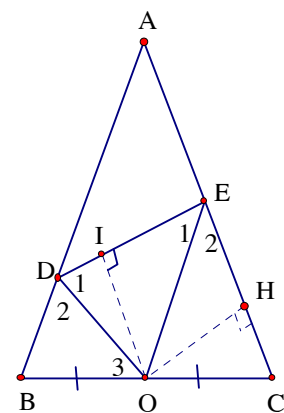
c) Gọi OH, OI là khoảng cách từ O đến DE, CE thì $OH = OI$, mà O cố định nên OH không đổi $\Rightarrow OI$ không đổi khi D di động trên AB

Bài 4: (Đề HSG huyện Lộc Hà – năm 2007 – 2008)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A, có $BC = 2a$, M là trung điểm BC, lấy D, E thuộc AB, AC sao cho $\hat{DME} = \hat{B}$

- a) Chứng minh tích BD. CE không đổi
- b) Chứng minh DM là tia phân giác của \hat{BDE}
- c) Tính chu vi của $\triangle AED$ nếu $\triangle ABC$ là tam giác đều

Giải



a) Ta có $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME} = \widehat{B} + \widehat{BDM}$, mà $\widehat{DME} = \widehat{B}$ (gt) nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$, kết hợp với $\widehat{B} = \widehat{C}$ ($\triangle ABC$ cân tại A) suy ra $\triangle BDM \sim \triangle CME$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM = a^2 \text{ không đổi}$$

$$b) \triangle BDM \sim \triangle CME \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{CM} \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{BM}$$

(do $BM = CM$) $\Rightarrow \triangle DME \sim \triangle DBM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{BMD}$ hay DM là tia phân giác của \widehat{BDE}

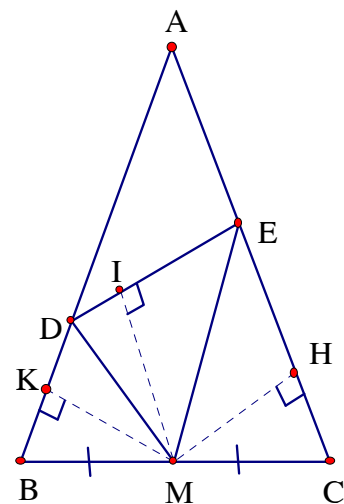
c) chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác của \widehat{DEC} kẻ $MH \perp CE$, $MI \perp DE$, $MK \perp DB$ thì $MH = MI = MK \Rightarrow \triangle DKM = \triangle DIM$

$$\Rightarrow DK = DI \Rightarrow \triangle EIM = \triangle EHM \Rightarrow EI = EH$$

Chu vi $\triangle AED$ là $P_{AED} = AD + DE + EA = AK + AH = 2AH$ (Vì $AH = AK$)

$\triangle ABC$ là tam giác đều nên suy ra $\triangle CME$ cũng là tam giác đều $CH = \frac{MC}{2} = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow AH = 1,5a \Rightarrow P_{AED} = 2AH = 2 \cdot 1,5a = 3a$$



Bài 5:

Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB, AC tại E và F

a) chứng minh $DE + DF$ không đổi khi D di động trên BC

b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt FE tại K.

Chứng minh rằng K là trung điểm của FE

Giải

$$a) DE \parallel AM \Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow DE = \frac{BD}{BM} \cdot AM \quad (1)$$

$$DF \parallel AM \Rightarrow \frac{DF}{AM} = \frac{CD}{CM} \Rightarrow DF = \frac{CD}{CM} \cdot AM = \frac{CD}{BM} \cdot AM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

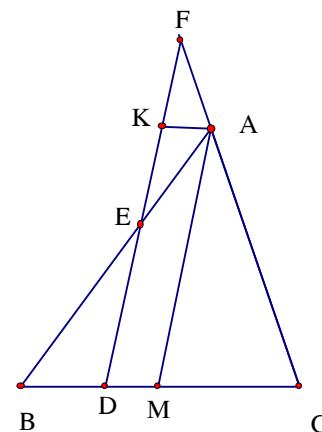
$$DE + DF = \frac{BD}{BM} \cdot AM + \frac{CD}{BM} \cdot AM = \left(\frac{BD}{BM} + \frac{CD}{BM} \right) \cdot AM = \frac{BC}{BM} \cdot AM = 2AM \text{ không đổi}$$

$$b) AK \parallel BC \text{ suy ra } \triangle FKA \sim \triangle AMC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{FK}{AM} = \frac{KA}{CM} \quad (3)$$

$$\frac{EK}{ED} = \frac{KA}{BD} \Rightarrow \frac{EK}{ED + EK} = \frac{KA}{BD + KA} \Rightarrow \frac{EK}{KD} = \frac{KA}{BD + DM} \Rightarrow \frac{EK}{AM} = \frac{KA}{BM} \Rightarrow \frac{EK}{AM} = \frac{KA}{CM} \quad (2)$$

(Vì $CM = BM$)

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{FK}{AM} = \frac{EK}{AM} \Rightarrow FK = EK \text{ hay K là trung điểm của FE}$$



Bài 6: (ĐỀ HSG huyện Thạch hà năm 2003 – 2004)

Cho hình thoi ABCD cạnh a có $\widehat{A} = 60^\circ$, một đường thẳng bất kỳ qua C cắt tia đối của các tia BA, DA tại M, N

- a) Chứng minh rằng tích $BM \cdot DN$ có giá trị không đổi
b) Gọi K là giao điểm của BN và DM . Tính số đo của góc BKD

Giải

$$a) BC // AN \Rightarrow \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN} \quad (1)$$

$$CD // AM \Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

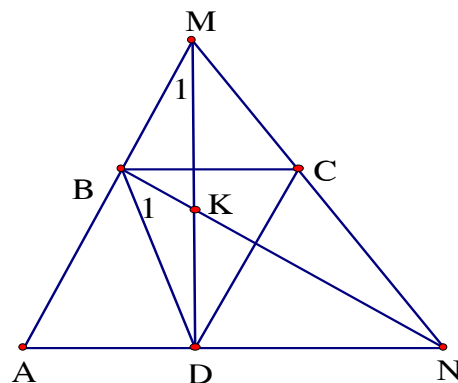
$$\frac{MB}{BA} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow MB \cdot DN = BA \cdot AD = a \cdot a = a^2$$

b) $\triangle MBD$ và $\triangle BDN$ có $\widehat{MBD} = \widehat{BDN} = 120^\circ$

$$\frac{MB}{BD} = \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN} = \frac{BD}{DN} \quad (\text{Do } ABCD \text{ là hình thoi})$$

có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $AB = BC = CD = DA$) $\Rightarrow \triangle MBD \sim \triangle BDN$

Suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$. $\triangle MBD$ và $\triangle BKD$ có $\widehat{BDM} = \widehat{BDK}$ và $\widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$ nên $\widehat{BKD} = \widehat{MBD} = 120^\circ$



Bài 7:

Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo lớn AC , tia Dx cắt SC , AB , BC lần lượt tại I , M , N . Vẽ CE vuông góc với AB , CF vuông góc với AD , BG vuông góc với AC . Gọi K là điểm đối xứng với D qua I . Chứng minh rằng

a) $IM \cdot IN = ID^2$

b) $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

c) $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

Giải

a) Từ $AD // CM \Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{CI}{AI} \quad (1)$

Từ $CD // AN \Rightarrow \frac{CI}{AI} = \frac{ID}{IN} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IM}{ID} = \frac{ID}{IN}$ hay $ID^2 = IM \cdot IN$

b) Ta có $\frac{DM}{MN} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow \frac{DM}{MN + DM} = \frac{CM}{MB + CM} \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{CM}{CB} \quad (3)$

Từ $ID = IK$ và $ID^2 = IM \cdot IN$ suy ra $IK^2 = IM \cdot IN$

$$\Rightarrow \frac{IK}{IM} = \frac{IN}{IK} \Rightarrow \frac{IK - IM}{IM} = \frac{IN - IK}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{IM} = \frac{KN}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{ID} = \frac{CM}{AD} = \frac{CM}{CB} \quad (4)$$

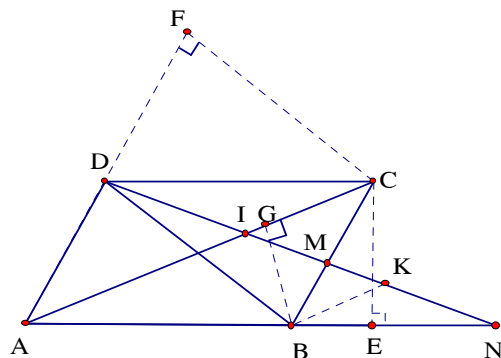
Từ (3) và (4) suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

c) Ta có $\triangle AGB \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AG$

$$\Rightarrow AB \cdot AE = AG(AG + CG) \quad (5)$$

$\triangle CGB \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{CG}{CB} = \frac{CG}{AD}$ (vì $CB = AD$)

$$\Rightarrow AF \cdot AD = AC \cdot CG \Rightarrow AF \cdot AD = (AG + CG) \cdot CG \quad (6)$$



Cộng (5) và (6) vế theo vế ta có:

$$AB \cdot AE + AF \cdot AD = (AG + CG) \cdot AG + (AG + CG) \cdot CG$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot AE + AF \cdot AD = AG^2 + 2 \cdot AG \cdot CG + CG^2 = (AG + CG)^2 = AC^2$$

$$\text{Vậy: } AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$

Bài tập về nhà

Bài 1

Cho Hình bình hành ABCD, một đường thẳng cắt AB, AD, AC lần lượt tại E, F, G

$$\text{Chứng minh: } \frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$$

HD: Kẻ DM // FE, BN // FE (M, N thuộc AC)

Bài 2:

Qua đỉnh C của hình bình hành ABCD, kẻ đường thẳng cắt BD, AB, AD ở E, G, F
chứng minh:

$$\text{a) } DE^2 = \frac{FE}{EG} \cdot BE^2$$

$$\text{b) } CE^2 = FE \cdot GE$$

(Gợi ý: Xét các tam giác DFE và BCE, DEC và BEG)

Bài 3

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD cắt nhau tại một điểm. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AD}{BD} = 1$$

$$\text{b) } BH = AC$$

CHUYÊN ĐỀ 11 – PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

A. Mục tiêu:

- * Củng cố, ôn tập kiến thức và kỹ năng giải các Pt bậc cao bằng cách phân tích thành nhân tử
- * Khắc sâu kỹ năng phân tích đa thức thành nhân tử và kỹ năng giải Pt

B. Kiến thức và bài tập:

I. Phương pháp:

- * Cách 1: Để giải các Pt bậc cao, ta biến đổi, rút gọn để đưa Pt về dạng Pt có vế trái là một đa thức bậc cao, vế phải bằng 0, vận dụng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để đưa Pt về dạng pt tích để giải
- * Cách 2: Đặt ẩn phụ

II. Các ví dụ:

1. Ví dụ 1: Giải Pt

$$\begin{aligned} \text{a) } & (x+1)^2(x+2) + (x-1)^2(x-2) = 12 \\ \Leftrightarrow & \dots \Leftrightarrow 2x^3 + 10x = 12 \Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) + (5x - 5) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 6) \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (Vì } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0 \text{ vô nghiệm)}$$

$$\text{b) } x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0 \quad (1)$$

Vế phải của Pt là một đa thức có tổng các hệ số bằng 0, nên có một nghiệm $x = 1$ nên có nhân tử là $x - 1$, ta có

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow (x^4 - x^3) + (x^3 - x^2) + (2x^2 - 2x) + (8x - 8) = 0 \\ & \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + 2x + 8) \Leftrightarrow (x-1)[(x^3 + 2x^2) - (x^2 + 2x) + (4x - 8)] = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1)[x^2(x+2) - x(x+2) + 4(x+2)] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2 - x + 4) = 0 \dots \end{aligned}$$

$$\text{c) } (x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 - 27x^3 - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow & -18x^3 + 33x^2 + 57x + 18 = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 11x^2 - 19x - 6 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Ta thấy Pt có một nghiệm $x = 3$, nên vế trái có nhân tử $x - 3$:

$$\begin{aligned} (2) & \Leftrightarrow (6x^3 - 18x^2) + (7x^2 - 21x) + (2x - 6) = 0 \\ \Leftrightarrow & 6x^2(x-3) + 7x(x-3) + 2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(6x^2 + 7x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-3)[(6x^2 + 3x) + (4x + 2)] = 0 \Leftrightarrow (x-3)[3x(2x+1) + 2(2x+1)] = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-3)(2x+1)(3x+2) \dots \end{aligned}$$

$$\text{d) } (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24 \Leftrightarrow [(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) + 1] - 25 = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (x^2 + 5x - 1)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5x - 1 + 5)(x^2 + 5x - 1 - 5) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow [(x^2 + x) + (4x + 4)][(x^2 - x) + (6x - 6)] = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+1)(x+4)(x-1)(x+6) = 0 \dots \end{aligned}$$

$$\text{e) } (x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1) \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^4 + x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)[x^2 + x + 1 - 3(x^2 - x + 1)] = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(-2x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x - 1)^2 = 0 \dots$$

$$f) x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 \Leftrightarrow (x^5 - 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$+) x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$+) x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + x^3) + (x + 1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^3 + 1) + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x^2 - x + 1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \left[(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4} \right] + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] + x^2 = 0 \text{ Vô nghiệm vì } (x + 1)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] \geq 0 \text{ nhưng}$$

không xảy ra dấu bằng

Bài 2:

$$a) (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 3) = 12 \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)[(x^2 + x - 2) - 1] - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - 2)^2 - (x^2 + x - 2) - 12 = 0$$

Đặt $x^2 + x - 2 = y$ Thì

$$(x^2 + x - 2)^2 - (x^2 + x - 2) - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y - 4)(y + 3) = 0$$

$$* y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x) - (2x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \dots$$

$$* y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$b) (x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680 \Leftrightarrow (x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680$$

Đặt $x^2 - 11x + 29 = y$, ta có:

$$(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 1) = 1680 \Leftrightarrow y^2 = 1681 \Leftrightarrow y = \pm 41$$

$$y = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x) + (12x - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 12) = 0 \dots$$

$$* y = -41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = -41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 70 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x \cdot \frac{11}{2} + \frac{121}{4}) + \frac{159}{4} = 0$$

$$c) (x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1 \quad (3)$$

Đặt $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = y \geq 0$, ta có

$$(3) \Leftrightarrow y^2 - 15(y + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 15y - 16 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 15) = 0$$

Với $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ (loại)

$$\text{Với } y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 15 \Rightarrow (x - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 4$$

$$+ x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7$$

$$+ x - 3 = -4 \Leftrightarrow x = -1$$

$$d) (x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0 \quad (4)$$

Đặt $x^2 + 1 = y$ thì

$$(4) \Leftrightarrow y^2 + 3xy + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (y^2 + xy) + (2xy + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow (y + x)(y + 2x) = 0$$

+) $x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$: Vô nghiệm
 +) $y + 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bài 3:

a) $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) = 18 \Leftrightarrow (2x + 1)(2x + 2)^2(2x + 3) = 72. (1)$

Đặt $2x + 2 = y$, ta có

(1) $\Leftrightarrow (y - 1)y^2(y + 1) = 72 \Leftrightarrow y^2(y^2 - 1) = 72$
 $\Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0$ Thì $y^4 - y^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow z^2 - z - 72 = 0 \Leftrightarrow (z + 8)(z - 9) = 0$

* $z + 8 = 0 \Leftrightarrow z = -8$ (loại)

* $z - 9 = 0 \Leftrightarrow z = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x = \dots$

b) $(x + 1)^4 + (x - 3)^4 = 82 (2)$

Đặt $y = x - 1 \Rightarrow x + 1 = y + 2; x - 3 = y - 2$, ta có

(2) $\Leftrightarrow (y + 2)^4 + (y - 2)^4 = 82$
 $\Leftrightarrow y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16 + y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 16 = 82$
 $\Leftrightarrow 2y^4 + 48y^2 + 32 - 82 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0 \Rightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 24z - 25 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 25) = 0$

+) $z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = 0; x = 2$

+) $z + 25 = 0 \Leftrightarrow z = -25$ (loại)

Chú ý: Khi giải Pt bậc 4 dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ ta thường đặt ẩn phụ $y = x + \frac{a+b}{2}$

c) $(4 - x)^5 + (x - 2)^5 = 32 \Leftrightarrow (x - 2)^5 - (x - 4)^5 = 32$

Đặt $y = x - 3 \Rightarrow x - 2 = y + 1; x - 4 = y - 1$; ta có:

$(x - 2)^5 - (x - 4)^5 = 32 \Leftrightarrow (y + 1)^5 - (y - 1)^5 = 32$
 $\Leftrightarrow y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1 - (y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 + 5y - 1) - 32 = 0$
 $\Leftrightarrow 10y^4 + 20y^2 - 30 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^2 - 3 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0 \Rightarrow y^4 + 2y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 3) = 0 \dots\dots\dots$

d) $(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4$

Đặt $x - 7 = a; x - 8 = b; 15 - 2x = c$ thì $-c = 2x - 15 \Rightarrow a + b = -c$, Nên

$(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = c^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - c^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - (a + b)^4 = 0$

$\Leftrightarrow 4ab(a^2 + \frac{3}{2}ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow 4ab \left[\left(a + \frac{3}{4}b \right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \right] = 0 \Leftrightarrow 4ab = 0$

(Vì $\left(a + \frac{3}{4}b \right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \geq 0$ nhưng không xảy ra dấu bằng) $\Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow x = 7; x = 8$

e) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 7 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 36 = 0$

(Vì $x = 0$ không là nghiệm). Đặt $x - \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, thì

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0 \Leftrightarrow 6(y^2 + 2) + 7y - 36 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 + 7y - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (6y^2 - 9y) + (16y - 24) = 0 \Leftrightarrow (3y + 8)(2y - 3) = 0$$

$$+) 3y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x + 3)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$+) 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (2x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 4: Chứng minh rằng: các Pt sau vô nghiệm

a) $x^4 - 3x^2 + 6x + 13 = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 4x^2 + 4) + (x^2 + 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 + (x + 3)^2 = 0$

Vế trái $(x^2 - 2)^2 + (x + 3)^2 \geq 0$ nhưng không đồng thời xảy ra $x^2 = 2$ và $x = -3$

b) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x = 1$ không là nghiệm của Pt $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Bài tập về nhà:

Bài 1: Giải các Pt

a) $(x^2 + 1)^2 = 4(2x - 1)$

HD: Chuyển vế, triển khai $(x^2 + 1)^2$, phân tích thành nhân tử: $(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5) = 0$

b) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$ (Nhân 2 nhân tử với nhau, áp dụng PP đặt ẩn phụ)

c) $(12x + 7)^2(3x + 2)(2x + 1) = 3$ (Nhân 2 vế với 24, đặt $12x + 7 = y$)

d) $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$ (Thêm, bớt $36x^2$)

e) $(x - 1)^4 + (x - 2)^4 = 1$ (Đặt $y = x - 1,5$; Đs: $x = 1$; $x = 2$)

f) $(x - 1)^5 + (x + 3)^5 = 242(x + 1)$ (Đặt $x + 1 = y$; Đs: 0 ; -1 ; -2)

g) $(x + 1)^3 + (x - 2)^3 = (2x - 1)^3$

Đặt $x + 1 = a$; $x - 2 = b$; $1 - 2x = c$ thì $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

h) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$ (Chia 2 vế cho x^2 ; Đặt $y = x + \frac{1}{x}$)

i) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ (Vế trái là đa thức có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ...)

Bài 2: Chứng minh các pt sau vô nghiệm

a) $2x^4 - 10x^2 + 17 = 0$

(Phân tích vế trái thành tổng của hai bình phương)

b) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$

(Phân tích vế trái thành tích của 2 đa thức có giá trị không âm...)

CHUYÊN ĐỀ 12 – VẼ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG ĐỂ TẠO THÀNH CÁC CẶP ĐOẠN THẲNG TỶ LỆ

A. Phương pháp:

Trong các bài tập vận dụng định lí Talét. Nhiều khi ta cần vẽ thêm đường phôi một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước. Đây là một cách vẽ đường phụ hay dùng, vì nhờ đó mà tạo thành được các cặp đoạn thẳng tỷ lệ

B. Các ví dụ:

1) Ví dụ 1:

Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, lấy tương ứng các điểm P, Q, R sao cho ba đường thẳng AP, BQ, CR cắt nhau tại một điểm.

Chứng minh: $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$ (Định lí Cê - va)

Giải

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt các đường thẳng CR, BQ tại E, F. Gọi O là giao điểm của AP, BQ, CR

$$\triangle ARE \sim \triangle BRC \Rightarrow \frac{AR}{RB} = \frac{AE}{BC} \quad (a)$$

$$\triangle BOP \sim \triangle FOA \Rightarrow \frac{BP}{FA} = \frac{OP}{OA} \quad (1)$$

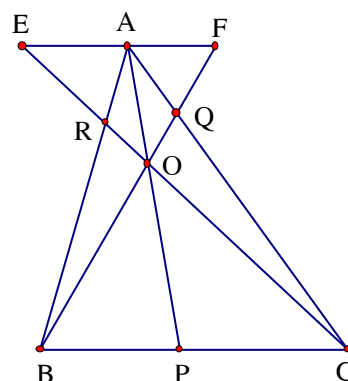
$$\triangle POC \sim \triangle AOE \Rightarrow \frac{PC}{AE} = \frac{PO}{AO} = (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{BP}{FA} = \frac{PC}{AE} \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{FA}{AE} \quad (b)$

$$\triangle AQF \sim \triangle CQB \Rightarrow \frac{CQ}{AQ} = \frac{BC}{FA} \quad (c)$$

Nhân (a), (b), (c) vế theo vế ta có: $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{AE}{BC} \cdot \frac{FA}{AE} \cdot \frac{BC}{FA} = 1$

* Đảo lại: Nếu $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$ thì ba đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy



2) Ví dụ 2:

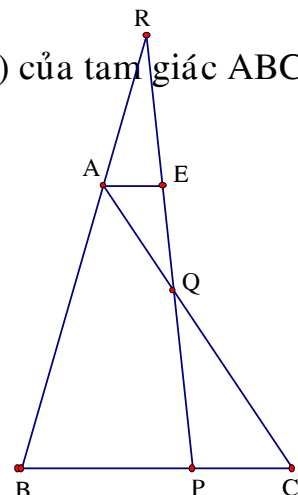
Một đường thẳng bất kỳ cắt các cạnh (phần kéo dài của các cạnh) của tam giác ABC tại P, Q, R.

Chứng minh rằng: $\frac{RB \cdot QA \cdot PC}{RA \cdot CQ \cdot BP} = 1$ (Định lí Mê-nê-la-uyt)

Giải:

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt PR tại E. Ta có

$$\triangle RAE \sim \triangle RBP \Rightarrow \frac{RB}{RA} = \frac{BP}{AE} \quad (a)$$



$$\Delta AQE \sim \Delta CQP \Rightarrow \frac{QA}{QC} = \frac{AE}{CP} \quad (b)$$

Nhân vế theo vế các đẳng thức (a) và (b) ta có

$$\frac{RB}{RA} \cdot \frac{QA}{QC} = \frac{BP}{AE} \cdot \frac{AE}{CP} \quad (1)$$

Nhân hai vế đẳng thức (1) với $\frac{PC}{BP}$ ta có: $\frac{RB}{RA} \cdot \frac{PC}{BP} \cdot \frac{QA}{QC} = \frac{BP}{AE} \cdot \frac{AE}{CP} \cdot \frac{PC}{BP} = 1$

Đảo lại: Nếu $\frac{RB \cdot QA \cdot PC}{RA \cdot CQ \cdot BP} = 1$ thì ba điểm P, Q, R thẳng hàng

3) Ví dụ 3:

Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Đường thẳng qua I song song với AC cắt AB ở K; đường thẳng qua I song song với AB cắt AC, AM theo thứ tự ở D, E. Chứng minh $DE = BK$

Giải

Qua M kẻ $MN \parallel IE$ ($N \in AC$). Ta có:

$$\frac{DE}{MN} = \frac{AE}{AN} \Rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{MN}{AN} \quad (1)$$

$MN \parallel IE$, mà $MB = MC \Rightarrow AN = CN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{AE} = \frac{MN}{CN}$ (3)

Ta lại có $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{CN} = \frac{AB}{AC}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{DE}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (a)

Tương tự ta có: $\frac{BK}{KI} = \frac{AB}{AC}$ (b)

Vì $KI \parallel AC$, $IE \parallel AC$ nên tứ giác AKIE là hình bình hành nên $KI = AE$ (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{BK}{KI} = \frac{BK}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra $\frac{DE}{AE} = \frac{BK}{AE} \Rightarrow DE = BK$

4) Ví dụ 4:

Đường thẳng qua trung điểm của cạnh đối AB, CD của tứ giác ABCD cắt các đường thẳng AD, BC theo thứ tự ở I, K. Chứng minh: $IA \cdot KC = ID \cdot KB$

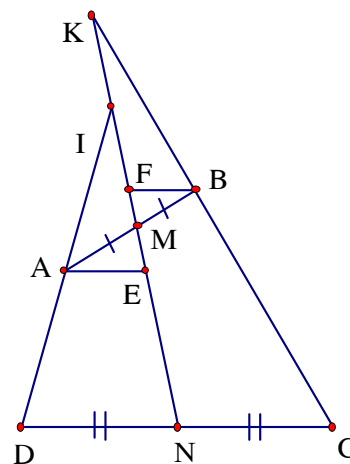
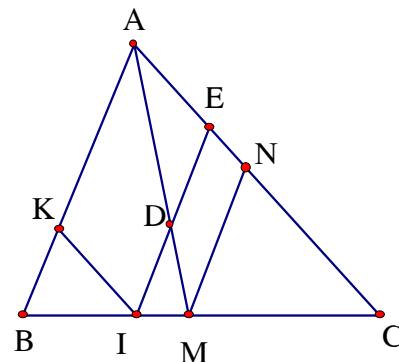
Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD

Ta có $AM = BM$; $DN = CN$

Vẽ AE, BF lần lượt song song với CD

$\Delta AME = \Delta BMF$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = BF$



Theo định lí Talét ta có: $\frac{IA}{ID} = \frac{AE}{DN} = \frac{BF}{CN}$ (1)

Cũng theo định lí Talét ta có: $\frac{KB}{KC} = \frac{BF}{CN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IA}{ID} = \frac{KB}{KC} \Rightarrow IA \cdot KC = ID \cdot KB$

5) Ví dụ 5:

Cho $\square Oy$, các điểm A, B theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox, Oy sao cho $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$ (k là hằng số). Chứng minh rằng AB luôn đi qua một điểm cố định

Giải

Vẽ tia phân giác Oz của $\square Oy$ cắt AB ở C. vẽ $CD \parallel OA$

($D \in OB$) $\Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{BCO} = \widehat{AOC}$

$\Rightarrow \triangle COD$ cân tại D $\Rightarrow DO = DC$

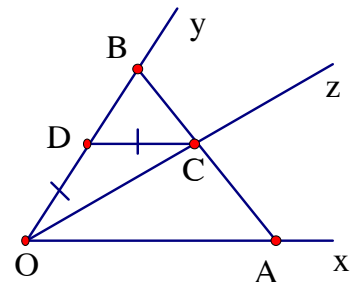
Theo định lí Talét ta có $\frac{CD}{OA} = \frac{BD}{OB} \Rightarrow \frac{CD}{OA} = \frac{OB - CD}{OB}$

$\Rightarrow \frac{CD}{OA} + \frac{CD}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{CD}$ (1)

Theo giả thiết thì $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CD = k$, không đổi

Vậy AB luôn đi qua một điểm cố định là C sao cho $CD = k$ và $CD \parallel Ox$, $D \in OB$



6) Ví dụ 6:

Cho điểm M di động trên đáy nhỏ AB của hình thang ABCD, Gọi O là giao điểm của hai cạnh bên DA, CB. Gọi G là giao điểm của OA và CM, H là giao điểm của OB và DM. Chứng minh

rằng: Khi M di động trên AB thì tổng $\frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC}$

không đổi

Giải

Qua O kẻ đường thẳng song với AB cắt CM, DM theo thứ tự ở I và K. Theo định lí Talét ta có:

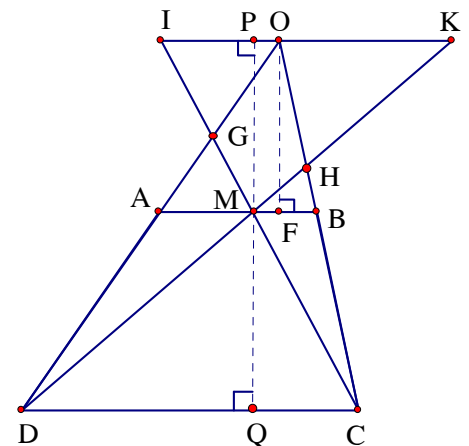
$\frac{OG}{GD} = \frac{OI}{CD}$; $\frac{OH}{HC} = \frac{OK}{CD} \Rightarrow \frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC} = \frac{OI}{CD} + \frac{OK}{CD} = \frac{IK}{CD}$
 $\Rightarrow \frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC} = \frac{IK}{CD}$ (1)

Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt IK, CD theo thứ tự ở P và Q, ta có:

$\frac{IK}{CD} = \frac{MP}{MQ} = \frac{FO}{MQ}$ không đổi vì FO là khoảng cách từ O đến AB, MQ là đường cao của

hình thang nên không đổi (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC} = \frac{FO}{MQ}$ không đổi



7) Ví dụ 7:

Cho tam giác ABC ($AB < AC$), phân giác AD. Trên AB lấy điểm M, trên AC lấy điểm N sao cho $BM = CN$, gọi giao điểm của CM và BN là O, Từ O vẽ đường thẳng song song với AD cắt AC, AB tại E và F.

Chứng minh rằng: $AB = CF$; $BE = CA$

Giải.

AD là phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAF}$

$EI \parallel AD \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{AEF}$ (góc đồng vị)

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{OFC}$ (đồng vị); $\widehat{AFE} = \widehat{OFC}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{AFE} \Rightarrow \Delta AFE$ cân tại A $\Rightarrow AE = AF$

(a)

Áp dụng định lí Talét vào ΔACD , với I là giao điểm của EF với BC ta có $\frac{CF}{CA} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow \frac{CF}{CI} = \frac{CA}{CD}$ (1)

AD là phân giác của \widehat{BAC} nên $\frac{CA}{CD} = \frac{BA}{BD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CF}{CI} = \frac{BA}{BD}$ (3)

Kẻ đường cao AG của ΔAFE . $BP \parallel AG$ ($P \in AD$); $CQ \parallel AG$ ($Q \in OI$) thì $\widehat{BPD} = \widehat{CQI} = 90^\circ$

Gọi trung điểm của BC là K, ta có $\Delta BPK = \Delta CQK$ (g.c.g) $\Rightarrow CQ = BP$
 $\Rightarrow \Delta BPD = \Delta CQI$ (g.c.g) $\Rightarrow CI = BD$ (4)

Thay (4) vào (3) ta có $\frac{CF}{BD} = \frac{BA}{BD} \Rightarrow CF = BA$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra $BE = CA$

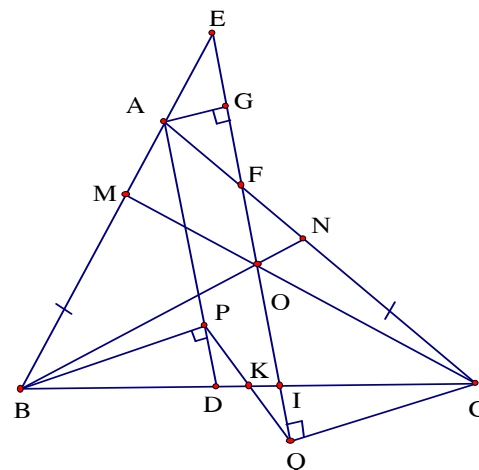
Bài tập về nhà

1) Cho tam giác ABC. Điểm D chia trong BC theo tỉ số 1 : 2, điểm O chia trong AD theo tỉ số 3 : 2. gọi K là giao điểm của BO và AC. Chứng minh rằng $\frac{KA}{KC}$ không đổi

2) Cho tam giác ABC ($AB > AC$). Lấy các điểm D, E tùy ý thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi giao điểm của DE, BC là K, chứng minh rằng :

Tỉ số $\frac{KE}{KD}$ không đổi khi D, E thay đổi trên AB, AC

(HD: Vẽ $DG \parallel EC$ ($G \in BC$)).



CHUYÊN ĐỀ 13 – BỔ ĐỀ HÌNH THANG VÀ CHÙM ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

A. Kiến thức:

1) Bổ đề hình thang:

“Trong hình thang có hai đáy không bằng nhau, đường thẳng đi qua giao điểm của các đường chéo và đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên thì đi qua trung điểm của hai đáy”

Chứng minh:

Gọi giao điểm của AB, CD là H, của AC, BD là G, trung điểm của AD, BC là E và F

Nối EG, FG, ta có: $\triangle ADG \sim \triangle CBG$ (g.g), nên :

$$\frac{AD}{CB} = \frac{AG}{CG} \Rightarrow \frac{2AE}{2CF} = \frac{AG}{CG} \Rightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{AG}{CG} \quad (1)$$

Ta lại có: $\angle EAG = \angle FCG$ (SL trong) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\triangle AEG \sim \triangle CFG$ (c.g.c)

Do đó: $\angle AGE = \angle CGF \Rightarrow E, G, H$ thẳng hàng (3)

Tương tự, ta có: $\triangle AEH \sim \triangle BFH \Rightarrow \angle AHE = \angle BHF$

$\Rightarrow H, E, F$ thẳng hàng (4)

Từ (3) và (4) suy ra: H, E, G, F thẳng hàng

2) Chùm đường thẳng đồng quy:

Nếu các đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song thì chúng định ra trên hai đường thẳng song song ấy các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ

Nếu $m \parallel n$, ba đường thẳng a, b, c đồng quy ở O chúng cắt m tại A, B, C và cắt n tại A', B', C' thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \text{hoặc} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}; \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

* Đảo lại:

+ Nếu ba đường thẳng trong đó có hai đường thẳng cắt nhau, định ra trên hai đường thẳng song song các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì ba đường thẳng đó đồng quy

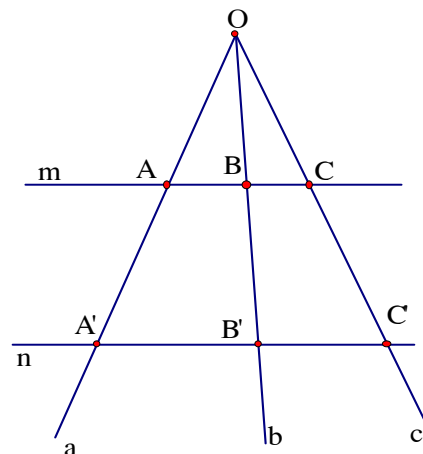
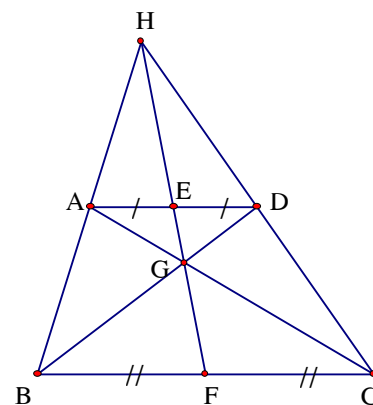
+ Nếu hai đường thẳng bị cắt bởi ba đường thẳng đồng quy tạo thành các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì chúng song song với nhau

B. Áp dụng:

1) Bài 1:

Cho tứ giác ABCD có M là trung điểm CD, N là trung điểm CB. Biết AM, AN cắt BD thành ba đoạn bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành

Giải



Gọi E, F là giao điểm của AM, AN với BD; G, H là giao điểm của MN với AD, BD

$MN \parallel BC$ (MN là đường trung bình của $\triangle BCD$)

\Rightarrow Tứ giác HBFM là hình thang có hai cạnh bên đồng quy tại A, N là trung điểm của đáy BF nên theo bổ đề hình thang thì N là trung điểm của đáy MH

$\Rightarrow MN = NH$ (1)

Tương tự : trong hình thang CDEN thì M là trung điểm của GN $\Rightarrow GM = MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $GM = MN = NH$

Ta có $\triangle BNH = \triangle CNM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BHN} = \widehat{CMN} \Rightarrow BH \parallel CM$ hay $AB \parallel CD$ (a)

Tương tự: $\triangle GDM = \triangle NCM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DGM} = \widehat{CNM} \Rightarrow GD \parallel CN$ hay $AD \parallel CB$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành

2) Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, trực tâm H, một đường thẳng qua H cắt AB, AC thứ tự tại P, Q sao cho $HP = HQ$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $HM \perp PQ$

Giải

Gọi giao điểm của AH và BC là I

Từ C kẻ $CN \parallel PQ$ ($N \in AB$),

ta chứng minh $MH \perp CN \Rightarrow HM \perp PQ$

Tứ giác CNPQ là hình thang, có H là trung điểm PQ, hai cạnh bên NP và CQ đồng quy tại A nên K là trung điểm CN $\Rightarrow MK$ là đường trung bình của $\triangle BCN \Rightarrow MK \parallel CN \Rightarrow MK \parallel AB$ (1)

H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên $CH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MK \perp CH \Rightarrow MK$ là đường cao của $\triangle CHK$ (3)

Từ $AH \perp BC \Rightarrow MC \perp HK \Rightarrow MI$ là đường cao của $\triangle CHK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra M là trực tâm của $\triangle CHK \Rightarrow MH \perp CN \Rightarrow MH \perp PQ$

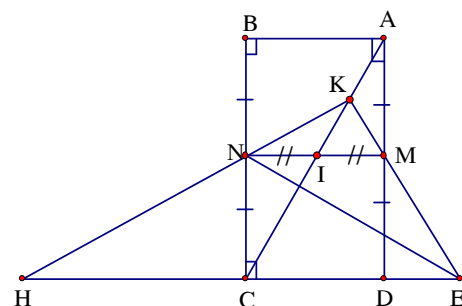
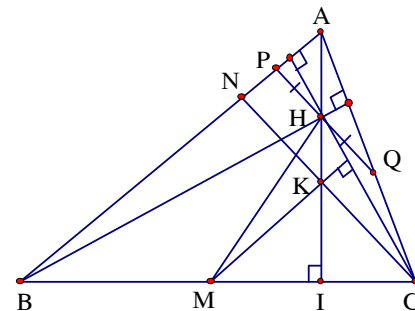
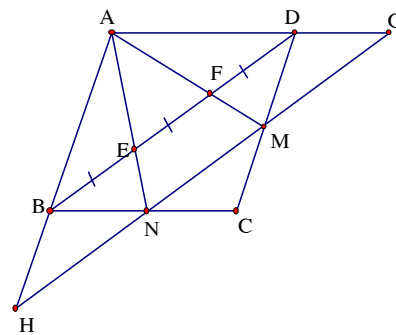
3) bài 3:

Cho hình chữ nhật ABCD có M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC. Chứng minh rằng: NM là tia phân giác của \widehat{KNE}

Giải

Gọi H là giao điểm của KN và DC, giao điểm của AC và MN là I thì $IM = IN$

Ta có: $MN \parallel CD$ (MN là đường trung bình của hình



chữ nhật ABCD)

⇒ Tứ giác EMNH là hình thang có hai cạnh bên EM và HN đồng quy tại K và I là trung điểm của MN nên C là trung điểm của EH

Trong $\triangle ENH$ thì NC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ENH$ cân tại N

⇒ NC là tia phân giác của $\sphericalangle ENH$ mà $NC \perp MN$ (Do $NM \perp BC - MN \parallel AB$) ⇒ NM là tia phân giác góc ngoài tại N của $\triangle ENH$

Vậy NM là tia phân giác của $\sphericalangle KNE$

Bài 4:

Trên cạnh $BC = 6$ cm của hình vuông ABCD lấy điểm E sao cho $BE = 2$ cm. Trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CF = 3$ cm. Gọi M là giao điểm của AE và BF.

Tính $\sphericalangle AMC$

Giải

Gọi giao điểm của CM và AB là H, của AM và DF là G

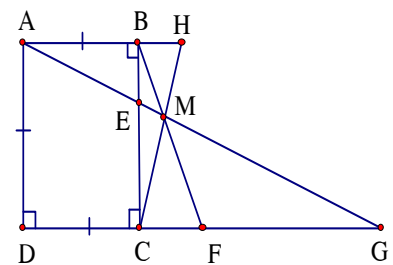
$$\text{Ta có: } \frac{BH}{CF} = \frac{AB}{FG} \Leftrightarrow \frac{BH}{3} = \frac{6}{FG}$$

$$\text{Ta lại có } \frac{AB}{CG} = \frac{BE}{EC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow CG = 2AB = 12 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow FG = 9 \text{ cm} \Rightarrow \frac{BH}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow BH = 2 \text{ cm} \Rightarrow BH = BE$$

$$\triangle BAE = \triangle BCH \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \sphericalangle BAE = \sphericalangle BCH \text{ mà } \sphericalangle BAE + \sphericalangle BEA = 90^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \sphericalangle BEA = \sphericalangle MEC ; \sphericalangle MCE = \sphericalangle BCH \Rightarrow \sphericalangle MEC + \sphericalangle MCE = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle AMC = 90^\circ$$



Bài 5:

Cho tứ giác ABCD. Qua điểm E thuộc AB, H thuộc AC vẽ các đường thẳng song song với BD, cắt các cạnh còn lại của tứ giác tại F, G

a) Có thể kết luận gì về các đường thẳng EH, AC, FG

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD, cho biết $OB = OD$.

Chứng minh rằng ba đường thẳng EG, FH, AC đồng quy

Giải

a) Nếu $EH \parallel AC$ thì $EH \parallel AC \parallel FG$

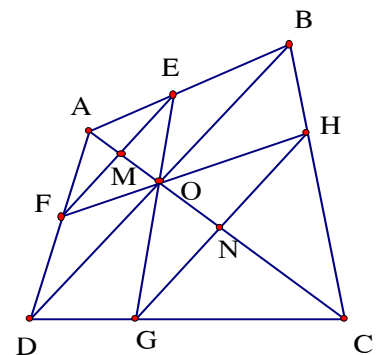
Nếu EH và AC không song song thì EH, AC, FG đồng quy

b) Gọi giao điểm của EH, HG với AC

Trong hình thang DFEB có hai cạnh bên DF, BE đồng quy tại A và $OB = OD$ nên theo bổ đề hình thang thì M là trung điểm của EF

Tương tự: N là trung điểm của GH

Ta có $\frac{ME}{GN} = \frac{MF}{HN}$ nên ba đường thẳng EG, FH, AC đồng quy tại O



CHUYÊN ĐỀ 14 – SỬ DỤNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ THIẾT LẬP QUAN HỆ ĐỘ DÀI CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG

A. Một số kiến thức:

1. Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2} a.h \quad (a - \text{độ dài một cạnh, } h - \text{độ dài đường cao tương ứng})$$

2. Một số tính chất:

Hai tam giác có chung một cạnh, có cùng độ dài đường cao thì có cùng diện tích

Hai tam giác bằng nhau thì có cùng diện tích

B. Một số bài toán:

1. Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ có $AC = 6\text{cm}$; $AB = 4\text{cm}$; các đường cao AH ; BK ; CI . Biết $AH = \frac{CI + BK}{2}$

Tính BC

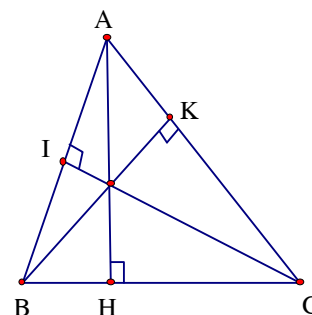
Giải

$$\text{Ta có: } BK = \frac{2S_{ABC}}{AC}; CI = \frac{2S_{ABC}}{AB}$$

$$\Rightarrow BK + CI = 2 \cdot S_{ABC} \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2AH = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} \right) \Leftrightarrow BC \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} \right) = 2$$

$$\Rightarrow BC = 2 : \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} \right) = 2 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) = 4,8 \text{ cm}$$



Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là a, b, c ; độ dài các đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c . Biết rằng $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác đều

Giải

Gọi $S_{ABC} = S$

$$\text{Ta xét } a + h_a = b + h_b \Rightarrow a - b = h_b - h_a = \frac{2S}{b} - \frac{2S}{a} = 2S \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = 2S \cdot \frac{a - b}{ab}$$

$$\Rightarrow a - b = 2S \cdot \frac{a - b}{ab} \Rightarrow (a - b) \left(1 - \frac{2S}{ab} \right) = 0 \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân ở } C \text{ hoặc vuông ở } C \quad (1)$$

Tương tự ta có: $\triangle ABC$ cân ở A hoặc vuông ở A (2); $\triangle ABC$ cân ở B hoặc vuông ở B (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\triangle ABC$ cân hoặc vuông ở ba đỉnh (Không xảy ra vuông tại ba đỉnh) $\Leftrightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều

Bài 3:

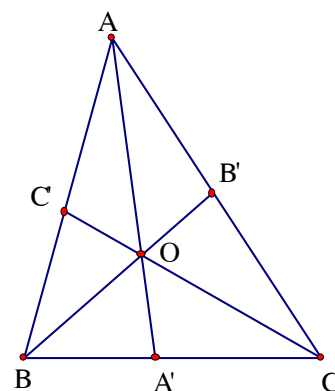
Cho điểm O nằm trong tam giác ABC , các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác

ABC theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng:

a) $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$ b) $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = 2$

c) $M = \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} = 6$. Tìm vị trí của O để tổng M có giá trị nhỏ nhất

d) $N = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{OC}{OC'} = 8$. Tìm vị trí của O để tích N có giá trị nhỏ nhất



Giải

Gọi $S_{ABC} = S$, $S_1 = S_{BOC}$, $S_2 = S_{COA}$, $S_3 = S_{AOB}$. Ta có:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{S_2}{S_{OAC}} = \frac{S_3}{S_{OAB}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \quad (1)$$

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OAC}}{S_{AAC}} = \frac{S_{OAB}}{S_{AAB}} = \frac{S_{OAC} + S_{OAB}}{S_{AAC} + S_{AAB}} = \frac{S_1}{S} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OA}{AA'} = \frac{S_2 + S_3}{S}$

Tương tự ta có $\frac{OB}{OB'} = \frac{S_1 + S_3}{S_2}$; $\frac{OC}{OC'} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}$; $\frac{OB'}{BB'} = \frac{S_2}{S}$; $\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_3}{S}$

a) $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1$

b) $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = \frac{S_2 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{2S}{S} = 2$

c) $M = \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_1 + S_3}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3}\right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1}\right)$

Áp dụng Bất Cô si ta có $\left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3}\right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$

Đẳng thức xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow O$ là trọng tâm của tam giác ABC

d) $N = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \cdot \frac{S_1 + S_3}{S_2} \cdot \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \frac{(S_2 + S_3)(S_1 + S_3)(S_1 + S_2)}{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$

$$\Rightarrow N^2 = \frac{(S_2 + S_3)^2 (S_1 + S_3)^2 (S_1 + S_2)^2}{(S_1 \cdot S_2 \cdot S_3)^2} \geq \frac{4S_1 S_2 \cdot 4S_2 S_3 \cdot 4S_1 S_3}{(S_1 \cdot S_2 \cdot S_3)^2} \geq 64 \Rightarrow N \geq 8$$

Đẳng thức xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow O$ là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 4:

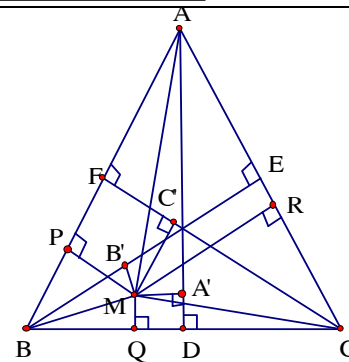
Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF; gọi A', B', C' là hình chiếu của M (nằm bên trong tam giác ABC) trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng: Khi M thay đổi vị trí trong tam giác ABC thì:

a) A'D + B'E + C'F không đổi

b) AA' + BB' + CC' không đổi

Giải

Gọi $h = AH$ là chiều cao của tam giác ABC thì h không đổi
 Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh AB ; BC ; CA là MP ;
 MQ ; MR thì $A'D + B'E + C'F = MQ + MR + MP$
 Vì M nằm trong tam giác ABC nên $S_{BMC} + S_{CMA} + S_{BMA} = S_{ABC}$
 $\Leftrightarrow BC.(MQ + MR + MP) = BC.AH \Rightarrow MQ + MR + MP = AH$



$\Rightarrow A'D + B'E + C'F = AH = h$

Vậy: $A'D + B'E + C'F = AH = h$ không đổi

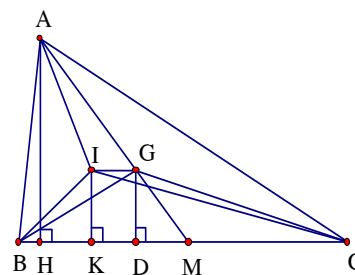
b) $AA' + BB' + CC' = (AH - A'D) + (BE - B'E) + (CF - C'F)$
 $= (AH + BE + CF) - (A'D + B'E + C'F) = 3h - h = 2h$ không đổi

Bài 5:

Cho tam giác ABC có BC bằng trung bình cộng của AC và AB ; Gọi I là giao điểm của các phân giác, G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh: $IG \parallel BC$

Giải

Gọi khoảng cách từ A, I, G đến BC lần lượt là AH, IK, GD
 Vì I là giao điểm của ba đường phân giác nên khoảng cách từ I đến ba cạnh AB, BC, CA bằng nhau và bằng IK



Vì I nằm trong tam giác ABC nên:

$$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} \Leftrightarrow BC.AH = IK.(AB+BC+CA) \quad (1)$$

$$\text{Mà } BC = \frac{AB+CA}{2} \Rightarrow AB+CA = 2BC \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có: } BC.AH = IK.3BC \Rightarrow IK = \frac{1}{3}AH \quad (a)$$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$S_{BGC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \Leftrightarrow BC.GD = \frac{1}{3}BC.AH \Rightarrow GD = \frac{1}{3}AH \quad (b)$$

Từ (a) và (b) suy ra $IK = GD$ hay khoảng cách từ I, G đến BC bằng nhau nên $IG \parallel BC$

Bài tập về nhà:

1) Cho C là điểm thuộc tia phân giác của $\angle xOy = 60^\circ$, M là điểm bất kỳ nằm trên đường vuông góc với OC tại C và thuộc miền trong của $\angle xOy$, gọi MA, MB thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy . Tính độ dài OC theo MA, MB

2) Cho M là điểm nằm trong tam giác đều ABC . A', B', C' là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB . Các đường thẳng vuông góc với BC tại C , vuông góc với CA tại A , vuông góc với AB tại B cắt nhau ở D, E, F . Chứng minh rằng:

a) Tam giác DEF là tam giác đều

b) $AB' + BC' + CA'$ không phụ thuộc vị trí của M trong tam giác ABC

CHUYÊN ĐỀ 15 – TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

A. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức:

1) Khái niệm: Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số k và tồn tại một giá trị của biến để A có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biến thuộc khoảng xác định nói trên

2) Phương pháp

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh $A \geq k$ với k là hằng số

+ Chỉ ra dấu “=” có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh $A \leq k$ với k là hằng số

+ Chỉ ra dấu “=” có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

Kí hiệu : $\min A$ là giá trị nhỏ nhất của A; $\max A$ là giá trị lớn nhất của A

B. Các bài tập tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức:

I) Dạng 1: Tam thức bậc hai

Ví dụ 1 :

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 - 8x + 1$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = -5x^2 - 4x + 1$

Giải

$$a) A = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$$

$$\min A = -7 \Leftrightarrow x = 2$$

$$b) B = -5(x^2 + \frac{4}{5}x) + 1 = -5(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{25}) + \frac{9}{5} = \frac{9}{5} - 5(x + \frac{2}{5})^2 \leq \frac{9}{5}$$

$$\max B = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$$

b) Ví dụ 2: Cho tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$

a) Tìm $\min P$ nếu $a > 0$

b) Tìm $\max P$ nếu $a < 0$

Giải

$$\text{Ta có: } P = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$$

Đặt $c - \frac{b^2}{4a} = k$. Do $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ nên:

$$a) \text{ Nếu } a > 0 \text{ thì } a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0 \text{ do đó } P \geq k \Rightarrow \min P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$b) \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } a(x + \frac{b}{2a})^2 \leq 0 \text{ do đó } P \leq k \Rightarrow \max P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

II. Dạng 2: Đa thức có dấu giá trị tuyệt đối

1) Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = (3x - 1)^2 - 4|3x - 1| + 5$

đặt $|3x - 1| = y$ thì $A = y^2 - 4y + 5 = (y - 2)^2 + 1 \geq 1$

$$\min A = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

b) $B = |x - 2| + |x - 3|$

$B = |x - 2| + |x - 3| = B = |x - 2| + |3 - x| \geq |x - 2 + 3 - x| = 1$

$\Rightarrow \min B = 1 \Leftrightarrow (x - 2)(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

2) Ví dụ 2: Tìm GTNN của $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$

Ta có $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = |x^2 - x + 1| + |2 + x - x^2| \geq |x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2| = 3$

$\min C = 3 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(2 + x - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

3) Ví dụ 3:

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Ta có $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| \geq |x-1+4-x| = 3$ (1)

Và $|x-2| + |x-3| = |x-2| + |3-x| \geq |x-2+3-x| = 1$ (2)

Vậy $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| \geq 1 + 3 = 4$

Ta có từ (1) \Rightarrow Dấu bằng xảy ra khi $1 \leq x \leq 4$

(2) \Rightarrow Dấu bằng xảy ra khi $2 \leq x \leq 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2 \leq x \leq 3$

III. Dạng 3: Đa thức bậc cao

1) Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = x(x - 3)(x - 4)(x - 7) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$

Đặt $x^2 - 7x + 6 = y$ thì $A = (y - 6)(y + 6) = y^2 - 36 \geq -36$

$\min A = -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 6$

b) $B = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2$

$= (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

c) $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = x^2 - 2x + y^2 - 2y + xy - x - y$

Ta có $C + 3 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (xy - x - y + 1)$

$= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1)$. Đặt $x - 1 = a$; $y - 1 = b$ thì

$C + 3 = a^2 + b^2 + ab = (a^2 + 2.a.\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}) + \frac{3b^2}{4} = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

$\min (C + 3) = 0$ hay $\min C = -3 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$

2) Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $C = (x + 8)^4 + (x + 6)^4$

$$\text{Đặt } x + 7 = y \Rightarrow C = (y + 1)^4 + (y - 1)^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1$$

$$= 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = -7$$

$$\text{b) } D = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9)$$

$$= (x^2 - 3x)^2 + (x - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow \min D = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

IV. Dạng phân thức:

1. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Biểu thức dạng này đạt GTNN khi mẫu đạt GTLN

$$\text{Ví dụ : Tìm GTNN của } A = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2} = \frac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \frac{-2}{(3x - 1)^2 + 4}$$

$$\text{Vì } (3x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (3x - 1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{(3x - 1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{(3x - 1)^2 + 4} \geq \frac{-2}{4} \Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}$$

$$\min A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

2. Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

$$\text{a) Ví dụ 1: Tìm GTNN của } A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$$

+) Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

$$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1) + 1}{(x - 1)^2} = 3 - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}. \text{ Đặt } y = \frac{1}{x - 1} \text{ Thì}$$

$$A = 3 - 2y + y^2 = (y - 1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

+) Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

$$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 4x + 4)}{(x - 1)^2} = 2 + \frac{(x - 2)^2}{(x - 1)^2} \geq 2$$

$$\Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{b) Ví dụ 2: Tìm GTLN của } B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100}$$

$$\text{Ta có } B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100} = \frac{x}{(x + 10)^2}. \text{ Đặt } y = \frac{1}{x + 10} \Rightarrow x = \frac{1}{y} - 10 \text{ thì}$$

$$B = \left(\frac{1}{y} - 10\right) \cdot y^2 = -10y^2 + y = -10\left(y^2 - 2y \cdot \frac{1}{20}y + \frac{1}{400}\right) + \frac{1}{40} = -10\left(y - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{40} \leq \frac{1}{40}$$

$$\text{Max } B = \frac{1}{40} \Leftrightarrow y - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 10$$

$$\text{c) Ví dụ 3: Tìm GTNN của } C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$$

$$\text{Ta có: } C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{\frac{1}{2}[(x + y)^2 + (x - y)^2]}{(x + y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$$

3. Các phân thức có dạng khác

$$\text{a) Ví dụ : Tìm GTNN, GTLN (Cực trị) của } A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1}$$

Ta có: $A = \frac{3-4x}{x^2+1} = \frac{(4x^2-4x+4)-(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Rightarrow \min A = -1 \Leftrightarrow x = 2$

Ta lại có: $A = \frac{3-4x}{x^2+1} = \frac{(4x^2+4)-(4x^2+4x+1)}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2+1} \leq 4 \Rightarrow \max A = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

C. Tìm GTNN, GTLN của một biểu thức biết quan hệ giữa các biến

1) Ví dụ 1: Cho $x + y = 1$. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$

Ta có $A = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$ (vì $x + y = 1$)

a) Cách 1: Biểu thị ẩn này qua ẩn kia, rồi đưa về một tam thức bậc hai

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

nên $A = (1 - y)^2 + y^2 = 2(y^2 - y) + 1 = 2\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Vậy $\min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

b) Cách 2: Sử dụng đk đã cho, làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1(1)$. Mặt khác $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (2)

Cộng (1) với (2) vế theo vế, ta có:

$2(x^2 + y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

2) Ví dụ 2: Cho $x + y + z = 3$

a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 + z^2$

b) Tìm GTLN của $B = xy + yz + xz$

Từ Cho $x + y + z = 3 \Rightarrow$ Cho $(x + y + z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 9$ (1)

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2] \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (2)

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

a) Từ (1) và (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \Rightarrow \min A = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

b) Từ (1) và (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \geq xy + yz + zx + 2(xy + yz + xz) = 3(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3 \Rightarrow \max B = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

3) Ví dụ 3:

Tìm giá trị lớn nhất của $S = xyz \cdot (x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)$ với $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$

Vì $x, y, z > 0$, áp dụng BĐT Côsi ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{27}$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $x+y$; $y+z$; $x+z$ ta có

$(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x) \geq 3\sqrt[3]{(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)} \Rightarrow 2 \geq 3\sqrt[3]{(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)}$

Đấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3} \Rightarrow S \leq \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{27} = \frac{8}{729}$

Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

4) Ví dụ 4: Cho $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + y^4 + z^4$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski cho 6 số $(x, y, z); (x, y, z)$

Ta có $(xy + yz + zx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \Rightarrow 1 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2$ (1)

áp dụng BĐT Bunhiacôpski cho (x^2, y^2, z^2) và $(1, 1, 1)$

Ta có $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 3(x^4 + y^4 + z^4)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 \leq 3(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \leq \frac{1}{3}$

Vậy $x^4 + y^4 + z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi $x = y = z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

D. Một số chú ý:

1) Khi tìm GTNN, GTLN ta có thể đổi biến

Ví dụ : Khi tìm GTNN của $A = (x - 1)^2 + (x - 3)^2$, ta đặt $x - 2 = y$ thì

$A = (y + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2y^2 + 2 \geq 2...$

2) Khi tìm cực trị của một biểu thức, ta có thể thay đk của biểu thức này đạt cực trị bởi đk tương đương là biểu thức khác đạt cực trị:

+) $-A$ lớn nhất $\Leftrightarrow A$ nhỏ nhất ; +) $\frac{1}{B}$ lớn nhất $\Leftrightarrow B$ nhỏ nhất (với $B > 0$)

+) C lớn nhất $\Leftrightarrow C^2$ lớn nhất

Ví dụ: Tìm cực trị của $A = \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

a) Ta có $A > 0$ nên A nhỏ nhất khi $\frac{1}{A}$ lớn nhất, ta có

$\frac{1}{A} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 + 1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \geq 1 \Rightarrow \min \frac{1}{A} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \max A = 1 \Leftrightarrow x = 0$

b) Ta có $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 1 \geq 2x^2$. (Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = 1$)

Vì $x^4 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow \max \frac{1}{A} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$

3) Nhiều khi ta tìm cực trị của biểu thức trong các khoảng của biến, sau đó so sánh các cực trị đó để tìm GTNN, GTLN trong toàn bộ tập xác định của biến

Ví dụ: Tìm GTLN của $B = \frac{y}{5 - (x + y)}$

a) xét $x + y \leq 4$

- Nếu $x = 0$ thì $A = 0$

- Nếu $1 \leq y \leq 3$ thì $A \leq 3$

- Nếu $y = 4$ thì $x = 0$ và $A = 4$

b) xét $x + y \geq 6$ thì $A \leq 0$

So sánh các giá trị trên của A, ta thấy $\max A = 4 \Leftrightarrow x = 0; y = 4$

4) Sử dụng các hằng bất đẳng thức

Ví dụ: Tìm GTLN của $A = |2x + 3y|$ biết $x^2 + y^2 = 52$

Áp dụng Bất Bunhiacốpski: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ cho các số 2, x, 3, y ta có:
 $(2x + 3y)^2 \leq (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = (4 + 9).52 = 26^2 \Rightarrow |2x + 3y| \leq 26$

$\max A = 26 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = 52 \Leftrightarrow 13x^2 = 52.4 \Leftrightarrow x = \pm$

4

Vậy: $\max A = 26 \Leftrightarrow x = 4; y = 6$ hoặc $x = -4; y = -6$

5) Hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

Hai số có tích không đổi thì tổng của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

a) Ví dụ 1: Tìm GTLN của $A = (x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$

Vì $(x^2 - 3x + 1) + (21 + 3x - x^2) = 22$ không đổi nên tích $(x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 - 3x + 1 = 21 + 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = -2$

Khi đó $A = 11.11 = 121 \Rightarrow \max A = 121 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = -2$

b) Ví dụ 2: Tìm GTNN của $B = \frac{(x+4)(x+9)}{x}$

Ta có: $B = \frac{(x+4)(x+9)}{x} = \frac{x^2 + 13x + 36}{x} = x + \frac{36}{x} + 13$

Vì các số x và $\frac{36}{x}$ có tích $x \cdot \frac{36}{x} = 36$ không đổi nên $x + \frac{36}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{36}{x} \Leftrightarrow x =$

6

$\Rightarrow A = x + \frac{36}{x} + 13$ nhỏ nhất là $\min A = 25 \Leftrightarrow x = 6$

6) Trong khi tìm cực trị chỉ cần chỉ ra rằng tồn tại một giá trị của biến để xảy ra đẳng thức chứ không cần chỉ ra mọi giá trị để xảy ra đẳng thức

Ví dụ: Tìm GTNN của $A = |11^m - 5^n|$

Ta thấy 11^m tận cùng bằng 1, 5^n tận cùng bằng 5

Nếu $11^m > 5^n$ thì A tận cùng bằng 6, nếu $11^m < 5^n$ thì A tận cùng bằng 4

khi $m = 2; n = 3$ thì $A = |121 - 124| = 4 \Rightarrow \min A = 4$, chẳng hạn khi $m = 2, n = 3$

GIẢI MỘT SỐ ĐỀ THI

Bài 1:

- a) Thực hiện phép chia: $(x^3 - 2x - 4) : (x^2 + 2x + 2)$
 b) Xác định a sao cho $ax^3 - 2x - 4$ chia hết cho $x - 2$
 c) Tìm nghiệm của đa thức: $x^3 - 2x - 4$

Bài 2:

a) Tính $S = \frac{a}{(c-a)(a-b)} + \frac{b}{(a-b)(b-c)} + \frac{c}{(b-c)(c-a)}$

b) Chứng minh $\frac{1}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5} \right)$

c) Tính $\frac{150}{5.8} + \frac{150}{8.11} + \frac{150}{11.14} + \dots + \frac{150}{47.50}$

Bài 3: Giải các phương trình

a) $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{2}{x(x^4+x^2+1)}$

b) $\frac{7-x}{1993} + \frac{5-x}{1995} + \frac{3-x}{1997} = -3$

Bài 4:

Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACE vuông cân ở C. CD cắt AB tại M, BE cắt AC tại N

- a) Chứng minh ba điểm D, A, E thẳng hàng; các tứ giác BCE; ACBD là hình thang
 b) Tính DM biết $AM = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$; $MC = 5\text{cm}$
 c) Chứng minh $AM = AN$

Bài 5:

Cho M là điểm nằm trong ΔABC , từ M kẻ $MA' \perp BC$, $MB' \perp AC$, $MC' \perp AB$

($A' \in BC$; $B' \in AC$; $C' \in AB$). Chứng minh rằng: $\frac{MA'}{h_a} + \frac{MB'}{h_b} + \frac{MC'}{h_c} = 1$

(Với h_a, h_b, h_c là ba đường cao của tam giác hạ lần lượt từ A, B, C xuống ba cạnh của ΔABC)

Bài giải

Bài 1:

a) Thực hiện phép chia: $(x^3 - 2x - 4) : (x^2 + 2x + 2) = x - 2$

b) Xác định a sao cho $ax^3 - 2x - 4$ chia hết cho $x - 2$

Vì $ax^3 - 2x - 4$ chia hết cho $x - 2$ nên $x = 2$ là nghiệm của đa thức $ax^3 - 2x - 4$, nên ta có:

a. $2^3 - 2 \cdot 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 8a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

c) Tìm nghiệm của đa thức: $x^3 - 2x - 4$

Nghiệm của đa thức là các giá trị của x để

$$x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

+) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ +) $x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 1 = 0$: Vô nghiệm

Vì $(x + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x

Bài 2:

$$\begin{aligned} \text{a) } S &= \frac{a}{(c-a)(a-b)} + \frac{b}{(a-b)(b-c)} + \frac{c}{(b-c)(c-a)} = \frac{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)}{(c-a)(a-b)(b-c)} \\ &= \frac{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)}{(c-a)(a-b)(b-c)} = \frac{ab - ac + bc - ab + ac - bc}{(c-a)(a-b)(b-c)} = \frac{0}{(c-a)(a-b)(b-c)} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) Chứng minh } \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5} \right)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5} \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{3n+5 - (3n+2)}{(3n+2)(3n+5)} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$$

$$\text{c) Tính: } \frac{150}{5.8} + \frac{150}{8.11} + \frac{150}{11.14} + \dots + \frac{150}{47.50}$$

$$\text{áp dụng câu b ta tính được } \frac{150}{5.8} + \frac{150}{8.11} + \frac{150}{11.14} + \dots + \frac{150}{47.50} = 9$$

Bài 3: Giải các phương trình

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{2}{x(x^4+x^2+1)} \Leftrightarrow \frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x(x^4+x^2+1)} - \frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{x(x^4+x^2+1)} = \frac{2}{x(x^4+x^2+1)} \quad (1)$$

ĐKXĐ: $x(x^4+x^2+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ Vì $x^4+x^2+1 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow x(x+1)(x^2-x+1) - x(x-1)(x^2+x+1) = 2 \Leftrightarrow x(x^3-1) - x(x^3+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x - x^4 - x = 2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{b) } \frac{7-x}{1993} + \frac{5-x}{1995} + \frac{3-x}{1997} = -3 \Leftrightarrow \frac{7-x}{1993} + 1 + \frac{5-x}{1995} + 1 + \frac{3-x}{1997} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2000$$

Bài 4:

Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACE vuông cân ở C. CD cắt AB tại M, BE cắt AC tại N

a) Chứng minh ba điểm D, A, E thẳng hàng; các tứ giác BCE; ACBD là hình thang

b) Tính DM biết AM = 3cm; AC = 4 cm; MC = 5cm

c) Chứng minh AM = AN

Giải

$$\text{a) Chứng minh } \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 180^\circ$$

$\Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng

b) Đặt $AB = c, AC = b.$

$BD \parallel AC$ (cùng vuông góc với AB)

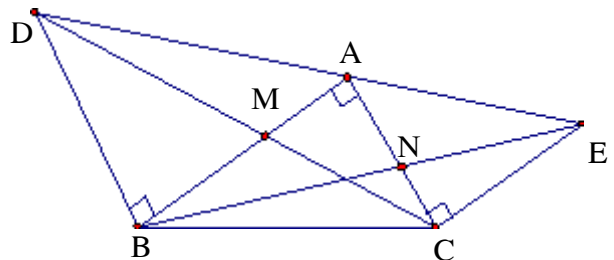
$$\text{nên } \frac{MC}{MD} = \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{AM}{MB+AM} = \frac{AC}{AC+BD}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AC+BD} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AC+AB} \Rightarrow AM = \frac{AC \cdot AB}{AC+AB} \quad (1)$$

$$\Rightarrow AM(AC+AB) = AC \cdot AB \Leftrightarrow 3(4+AB) = 4AB \Leftrightarrow AB = 12 \text{ cm} \Rightarrow MB = 9 \text{ cm}$$

$$\text{Từ } \frac{MC}{MD} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow MD = \frac{MC \cdot MB}{MA} = \frac{5 \cdot 9}{3} = 15 \text{ cm}$$

$$\text{c) } AB \parallel CE \text{ (cùng vuông góc với AC) nên } \frac{AN}{NC} = \frac{AB}{CE} \Rightarrow \frac{AN}{NC+AN} = \frac{AB}{AB+CE}$$



$$\Leftrightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow AN = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AM = AN$

Bài 5:

Cho M là điểm nằm trong $\triangle ABC$, từ M kẻ $MA' \perp BC$, $MB' \perp AC$, $MC' \perp AB$

($A' \in BC$; $B' \in AC$; $C' \in AB$). Chứng minh rằng: $\frac{MA'}{h_a} + \frac{MB'}{h_b} + \frac{MC'}{h_c} = 1$

(Với h_a, h_b, h_c là ba đường cao của tam giác hạ lần lượt từ A, B, C xuống ba cạnh của $\triangle ABC$)
Giải

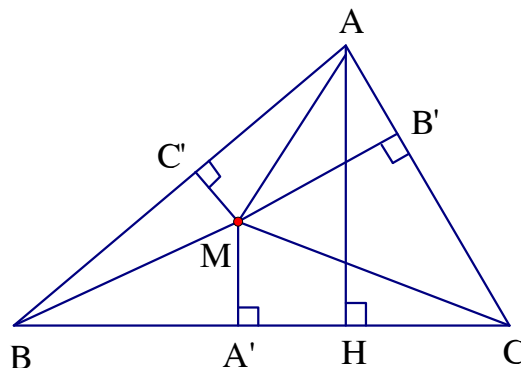
Kẻ đường cao AH, ta có:

$$\frac{MA'}{h_a} = \frac{MA'}{AH} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{MB'}{h_b} = \frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} \quad (2)$ và $\frac{MC'}{h_c} = \frac{S_{MBA}}{S_{ABC}} \quad (3)$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{MA'}{h_a} + \frac{MB'}{h_b} + \frac{MC'}{h_c} &= \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MBA}}{S_{ABC}} \\ &= \frac{S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MBA}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1 \end{aligned}$$



Câu 1

a) Trong ba số a, b, c có 1 số dương, 1 số âm và 1 số bằng 0; ngoài ra còn biết thêm

$|a| = b^2(b-c)$. Hỏi số nào dương, số nào âm, số nào bằng 0

b) Cho $x + y = 1$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3xy$

Câu 2

a) Giải phương trình: $||x+2|-3|=1$

b) Giả sử a, b, c là ba số đôi một khác nhau và $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$

Câu 3:

Cho tam giác ABC; gọi Ax là tia phân giác của \widehat{BAC} , Ax cắt BC tại E. Trên tia Ex lấy điểm H sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{ECH}$. Chứng minh rằng:

a) $BE \cdot EC = AE \cdot EH$

b) $AE^2 = AB \cdot AC - BE \cdot EC$

Câu 4:

Cho tứ giác ABCD. Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BD tại E; từ B kẻ đường thẳng song song với AD cắt AC tại F.

Chứng minh rằng: $EF \parallel DC$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1:

a) Vì $|a| = b^2(b-c)$ nên $a \neq 0$ và $b \neq 0$ vì

Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 0$ hoặc $b = c$. Vô lí

Nếu $b = 0 \Rightarrow a = 0$. Vô lí

$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow |a| = b^3$ mà $|a| \geq 0$ với mọi $a \Rightarrow b > 0 \Rightarrow a < 0$

b) Vì $x + y = 1 \Rightarrow A = x^3 + y^3 + 3xy = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = (x + y)^3 = 1$

Câu 2:

b) Từ $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b-c} = \frac{b}{a-c} + \frac{c}{b-a} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (1) (Nhân hai vế với $\frac{1}{b-c}$)

Tương tự, ta có: $\frac{b}{(c-a)^2} = \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (2); $\frac{c}{(a-b)^2} = \frac{a^2 - ac + cb - b^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (3)

Cộng từng vế (1), (2) và (3) ta có đpcm

Câu 3:

a) Ta có $\triangle BAE \simeq \triangle HCE$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BE}{EH} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow BE \cdot EC = AE \cdot EH$ (1)

b) $\triangle BAE \simeq \triangle HCE$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CHE} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CHA}$

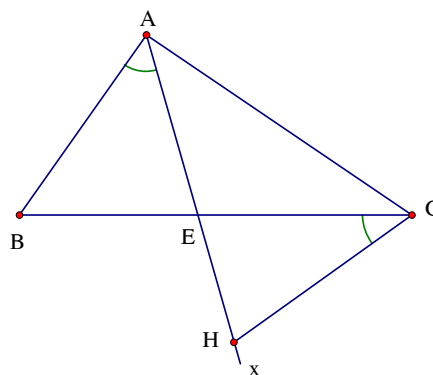
$\Rightarrow \triangle BAE \simeq \triangle HAC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow AB \cdot AC = AE \cdot AH$ (2)

Trừ (1) cho (2) vế theo vế ta có :

$$AB \cdot AC - BE \cdot EC = AE \cdot AH - AE \cdot EH$$

$\Leftrightarrow AB \cdot AC - BE \cdot EC = AE \cdot (AH - EH) = AE \cdot AE = AE^2$



Câu 4:

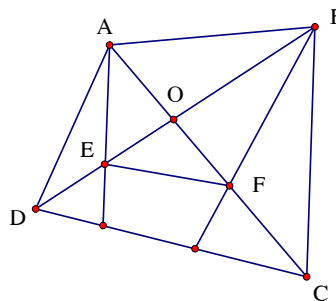
Gọi O là giao điểm của AC và BD

a) Vì $AE \parallel BC \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}$ (1)

$BF \parallel AD \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OF}{OA}$ (2)

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: $\frac{OE}{OD} = \frac{OF}{OC}$

$\Rightarrow EG \parallel CD$



Bài 1:

Cho phân thức: $P = \frac{2|x-4|}{x^2 + x - 20}$

- a) Tìm TXĐ của P
b) Rút gọn P
c) Tính giá trị của P khi $|x - 5| = 1,5$

Bài 2:

So sánh A và B biết:

- a) $A = 2002 \cdot 2004$ và $B = 2003^2$
b) $A = 3 \cdot (2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)$ và $B = 2^{64}$

Bài 3:

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn AC. Hạ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD và BG vuông góc với AC. Chứng minh:

- a) $\triangle ACE \sim \triangle ABG$ và $\triangle AFC \sim \triangle CBG$
b) $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

Bài 4:

Cho hình thoi ABCD cạnh a, có $\hat{A} = 60^\circ$. Một đường thẳng bất kỳ qua C cắt tia đối của tia BA và DA lần lượt tại M và N

- a) Chứng minh: Tích BM · DN có giá trị không đổi
b) Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính số đo góc BKD

Bài 5:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$4(x + y) = 11 + xy$$

Giải

Bài 1:

- a) Đkxd: $x^2 + x - 20 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 5) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$ và $x \neq -5$

$$b) P = \frac{2|x - 4|}{x^2 + x - 20} = \frac{2|x - 4|}{(x - 4)(x + 5)}$$

$$\text{Nếu } x > 4 \Rightarrow P = \frac{2}{x + 5}$$

$$\text{Nếu } x < 4 \Rightarrow P = \frac{-2}{x + 5}$$

$$c) |x - 5| = 1,5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 1,5; (x > 5) \\ 5 - x = 1,5; (x < 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6,5 \\ x = 3,5 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 6,5 \text{ thì } P = \frac{2}{x + 5} = \frac{2}{6,5 + 5} = \frac{2}{11,5} = \frac{20}{115} = \frac{4}{23}$$

$$\text{Với } x = 3,5 \text{ thì } P = \frac{-2}{x + 5} = \frac{-2}{3,5 + 5} = \frac{-2}{8,5} = \frac{-2}{17}$$

Bài 2:

- a) $A = 2002 \cdot 2004 = (2003 - 1)(2003 + 1) = 2003^2 - 1 < 2003^2 \Rightarrow A < B$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot (2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) \\ &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) \\ &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) \\ &= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^{32} - 1)(2^{32} + 1) = 2^{64} - 1 < 2^{64} \Rightarrow A < B \end{aligned}$$

Bài 3:

Ta có $\triangle AGB \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AC}{AB}$

$\Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AG$ (1)

$\triangle CGB \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{CG}{CB} = \frac{CG}{AD}$ (vì $CB = AD$)

$\Rightarrow AF \cdot AD = AC \cdot CG$ (2)

Cộng (5) và (6) vế theo vế ta có:

$AB \cdot AE + AF \cdot AD = AC \cdot AG + AC \cdot CG$

$\Leftrightarrow AB \cdot AE + AF \cdot AD = AC(AG + CG) = AC \cdot AC$

Vậy: $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

Bài 4:

a) $BC \parallel AN \Rightarrow \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN}$ (1)

$CD \parallel AM \Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MB}{BA} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow MB \cdot DN = BA \cdot AD = a \cdot a = a^2$

b) $\triangle MBD$ và $\triangle BDN$ có $\angle MBD = \angle BDN = 120^\circ$

$\frac{MB}{BD} = \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN} = \frac{BD}{DN}$ (Do $ABCD$ là hình thoi có $\angle A = 60^\circ$ nên

$AB = BC = CD = DA$) $\Rightarrow \triangle MBD \sim \triangle BDN$

Suy ra $\angle M_1 = \angle B_1$. $\triangle MBD$ và $\triangle BKD$ có $\angle BDM = \angle BDK$ và $\angle M_1 = \angle B_1$ nên $\angle BKD = \angle MBD = 120^\circ$

Câu 1:

Cho $A = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1}$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để A = 0

c) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Câu 2:

Giải phương trình: $(x + 1)^2 = 4(x^2 + 2x + 1)$

Câu 3:

Cho a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

Tính giá trị của biểu thức: $A = (a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3)$

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 2\angle B = 4\angle C = 4\alpha$. Chứng minh: $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$

Câu 5:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC. Lấy D, E theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho: $\angle DME = \angle B$

a) Chứng minh rằng: tích BD. CE không đổi

b) Chứng minh rằng DM là tia phân giác của góc BDE

c) Tính chu vi của $\triangle ADE$ nếu $\triangle ABC$ là tam giác đều

HƯỚNG DẪN

Câu 3:

$$\text{Từ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b) \cdot \frac{c(a+b+c) + ab}{abc(a+b+c)} = 0 \hat{=} (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

Từ đó suy ra : $A = (a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = (a+b)(b+c)(c+a)$. $B = 0$

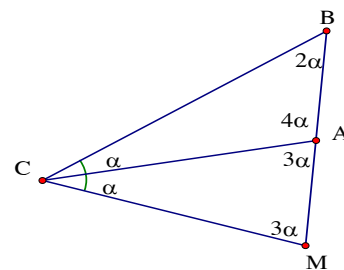
Câu 4 :

Vẽ tia CM ($M \in AB$) sao cho $\widehat{ACM} = \alpha$

ΔCAM và ΔCBM là các tam giác cân

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} + \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{CM} + \frac{AB}{CM} = \frac{AM+AB}{CM} = \frac{BM}{CM} = 1$$

$$(\text{vì } BM = CM) \Rightarrow \frac{AB}{BC} + \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$$



Câu 5 :

a) Ta có $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME} = \widehat{B} + \widehat{BDM}$, mà $\widehat{DME} = \widehat{B}$ (gt)

nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$, kết hợp với $\widehat{B} = \widehat{C}$ (ΔABC cân tại A)

suy ra $\Delta BDM \sim \Delta CME$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM = a^2 \text{ không đổi}$$

$$\text{b) } \Delta BDM \sim \Delta CME \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{CM} \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{BM}$$

(do $BM = CM$) $\Rightarrow \Delta DME \sim \Delta DBM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{BMD}$

hay DM là tia phân giác của \widehat{BDE}

c) chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác của \widehat{DEC}

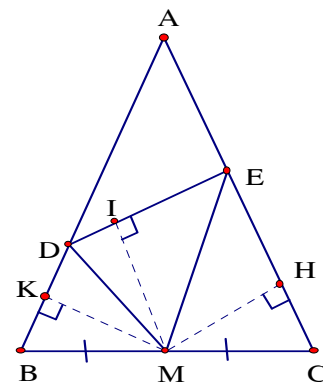
kẻ $MH \perp CE$, $MI \perp DE$, $MK \perp DB$ thì $MH = MI = MK \Rightarrow \Delta DKM = \Delta DIM$

$$\Rightarrow DK = DI \Rightarrow \Delta EIM = \Delta EHM \Rightarrow EI = EH$$

Chu vi ΔAED là $P_{AED} = AD + DE + EA = AK + AH = 2AH$ (Vì $AH = AK$)

$$\Delta ABC \text{ là tam giác đều nên suy ra } CH = \frac{MC}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow AH = 1,5a \Rightarrow P_{AED} = 2AH = 2 \cdot 1,5a = 3a$$



ĐỀ 5 - KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LỘC HÀ (2009 - 2010)

Câu 1 : Giải phương trình : a) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+3}{x-4} + \frac{2}{(x-2) \cdot (4-x)}$

b) $6x^2 - x - 2 = 0$

Câu 2 : Cho $x + y + z = 0$. Rút gọn : $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}$

Câu 3 : Chứng minh rằng không tồn tại x thỏa mãn :

a) $2x^4 - 10x^2 + 17 = 0$

b) $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$

Câu 4 : Cho tam giác ABC, điểm D nằm trên cạnh BC sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$;

điểm O nằm trên đoạn AD sao cho $\frac{OA}{OD} = \frac{3}{2}$. Gọi K là giao điểm của BO và AC.

Tính tỷ số AK : KC.

Câu 5 : Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, trực tâm H. Một đường thẳng qua H cắt AB, AC thứ tự ở P và Q sao cho HP = HQ. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác MPQ cân tại M.

hướng dẫn giải

Câu 2:

Từ $x + y + z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$ (1)

Ta có: $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = -6(xy + yz + zx)$ (3)

Thay (1) và (3) vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{-2(xy + yz + zx)}{-6(xy + yz + zx)} = \frac{1}{3}$$

Câu 3:

$$a) 2x^4 - 10x^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^4 - 5x^2 + \frac{17}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^4 - 2 \cdot \frac{5}{2}x^2 + \frac{25}{4}\right)^2 + \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} = 0. \text{ Vì } 2\left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} > 0 \text{ với mọi } x \text{ nên không tồn tại } x \text{ để}$$

$$2x^4 - 10x^2 + 17 = 0$$

$$b) x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Vì vế phải luôn dương với mọi x nên không tồn tại x để $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$

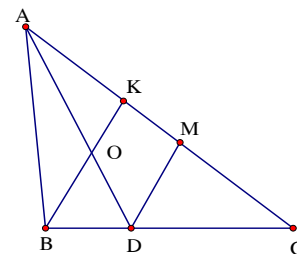
Câu 4:

Từ D kẻ DM // BK. áp dụng định lí Talét vào ΔAOK ta có:

$$\frac{AK}{KM} = \frac{AO}{OD} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, trong } \Delta CKB \text{ thì: } \frac{KM}{CK} = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\text{Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: } \frac{AK}{CK} = \frac{1}{2}$$



Câu 5

Gọi giao điểm của AH và BC là I

Từ C kẻ CN // PQ (N ∈ AB),

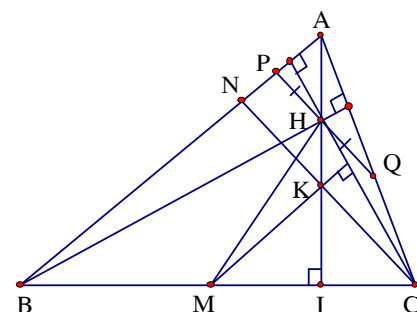
Tứ giác CNPQ là hình thang, có H là trung điểm PQ, hai cạnh bên NP và CQ đồng quy tại A nên K là trung điểm

CN ⇒ MK là đường trung bình của ΔBCN

⇒ MK // CN ⇒ MK // AB (1)

H là trực tâm của ΔABC nên CH ⊥ AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra MK ⊥ CH ⇒ MK là đường cao của ΔCHK (3)



Từ $AH \perp BC \Rightarrow MC \perp HK \Rightarrow MI$ là đường cao của $\triangle CHK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra M là trực tâm của $\triangle CHK \Rightarrow MH \perp CN \Rightarrow MH \perp PQ$
 $\triangle MPQ$ có MH vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên cân tại M

ĐỀ 6 - thi HSG Toán 8 - cấp huyện

Câu 1: a) Tìm các số nguyên m, n thoả mãn $m = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1}$

b) Đặt $A = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên dương của n .

c) Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13.

Câu 2: Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$b) B = \left[\left(x + \frac{1}{x} \right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6} \right) - 2 \right] : \left[\left(x + \frac{1}{x} \right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3} \right]$$

Câu 3: Tính tổng: $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2009.2011}$

Câu 4: Cho 3 số x, y, z , thoả mãn điều kiện $xyz = 2011$. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến x, y, z : $\frac{2011x}{xy + 2011x + 2011} + \frac{y}{yz + y + 2011} + \frac{z}{xz + z + 1}$

Câu 5: Giải phương trình: $\frac{69-x}{1942} + \frac{67-x}{1944} + \frac{65-x}{1946} + \frac{63-x}{1948} + \frac{61-x}{1950} = -5$

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ tam giác đều, gọi M là trung điểm của BC . Một góc $\sphericalangle My = 60^\circ$ quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh:

a) $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$

b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của $\sphericalangle BDE$ và $\sphericalangle CED$.

c) Chu vi $\triangle ADE$ không đổi.

Giải

1) a, Thực hiện chia $m = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1} = n + \frac{1}{n + 1}$

Để m nguyên với n nguyên khi $n + 1$ là ước của 1

Hay $n + 1 \in \{1; -1\}$. Khi đó: $n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0 \in \mathbb{Z} (t/m)$

$$n + 1 = -1 \Rightarrow n = -2 \in \mathbb{Z} (t/m)$$

Với $n = 0 \Rightarrow m = 1$. Với $n = -2 \Rightarrow m = -3$. Vậy ...

b, $A = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n + 1)^3 + 2(n + 1) = \square = n(n + 1)(n + 2) + 3(n + 1)$

Khi đó: $3(n + 1) : 3$

$n(n + 1)(n + 2)$ là tích của 3 số nguyên dương liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 3

c, $a = 13k + 2, b = 13q + 3$

$$a^2 + b^2 = (13k + 2)^2 + (13q + 3)^2 = \dots = 13(13k^2 + 4k + 13q^2 + 4q + 1) : 13$$

$$2) a) A = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} - \frac{ca}{(b-c)(a-b)} + \frac{ab}{(a-c)(b-c)} = \square = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1$$

b) Ta có: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = \left(\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2$; $x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^3\right)^2 + \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 - 2$

Tử thức: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2 = \left(\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2 - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2$

$= 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\left[2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$

Mẫu thức: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Rút gọn ta có: $B = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

3) $S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2011}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2011}\right) = \frac{1005}{2011}$

4). $\frac{2011x}{2011 + 2011x + xy} + \frac{y}{xyz + y + yz} + \frac{z}{1 + z + zx} = \frac{xy \cdot xz}{xyz + x^2yz + xy} + \frac{y}{xyz + y + yz} + \frac{z}{1 + z + zx}$
 $= \frac{xy \cdot xz}{xy(xz + z + 1)} + \frac{1}{1 + z + zx} + \frac{z}{1 + z + zx} = \frac{1 + z + xz}{1 + z + zx} = 1$ không đổi

5) $\left(\frac{69-x}{1942} + 1\right) + \left(\frac{67-x}{1944} + 1\right) + \left(\frac{65-x}{1946} + 1\right) + \left(\frac{63-x}{1948} + 1\right) + \left(\frac{61-x}{1950} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2011.$

6) a, Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle CEM$

... Vì $BM = CM = \frac{BC}{2} \Rightarrow BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$

b, Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle MED$

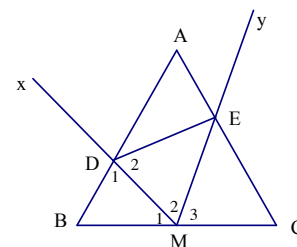
Từ đó suy ra $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$, do đó DM là tia phân giác của góc BDE

Chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác của góc CED

c, Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC

Chứng minh $DH = DI$, $EI = EK$.

Chu vi bằng $2 \cdot AH$.



Bài 1 (4.0 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^2 - 7x + 12.$

b) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011.$

c) $(x^2 + y^2 + 1)^4 - 17(x^2 + y^2 + 1)^2x^2 + 16x^4$

Bài 2 (4.0 điểm).

Cho biểu thức: $A = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$

a) Rút gọn A

b) tìm x để A = 0

c) Tìm giá trị của A khi $|2x - 1| = 7$

Bài 3 (4.0 điểm) : Giải các phương trình :

$$a) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

$$b) \frac{2025-x}{25} + \frac{2046-x}{23} + \frac{2057-x}{19} + \frac{2068-x}{17} = 10$$

Bài 4 (2.đ) Chứng minh : $a^5 - a$ chia hết cho 30 với $a \in \mathbb{Z}$

Bài 5 (4.0điểm) : Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi E; F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Gọi M là giao điểm của CE và DF.

a) Chứng minh CE vuông góc với DF

b) Chứng minh : $\left(\frac{CM \cdot CE}{CF} \right)^2 = S_{ABCD}$

Bài 6 2.0 điểm) Cho tam giác ABC có chu vi bằng 18 . Trong đó BC là cạnh lớn nhất .

Đường phân giác góc B cắt AC ở M sao cho $\frac{MA}{MC} = \frac{1}{2}$. Đường phân giác của góc C cắt AB

ở N sao cho $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{4}$. Tính các cạnh của tam giác ABC .

Đề thi HSG

Câu 1: Tìm x biết:

a) $x^2 - 4x + 4 = 25$

b) $\frac{x-17}{1990} + \frac{x-21}{1986} + \frac{x+1}{1004} = 4$

c) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

Câu 2: Cho x, y, z đôi một khác nhau và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$

Câu 3: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right)$$

a) Rút gọn p .

b) Tính giá trị của biểu thức p khi $|x| = \frac{3}{4}$

c) Với giá trị nào của x thì $P = 7$

d) Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên .

Câu 4 : Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC', H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: AN.BI.CM = BN.IC.AM.

c) Chứng minh rằng: $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$.

Câu 5:

Qua trọng tâm G tam giác ABC, kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AB và BC lần lượt tại M và N.

Tính độ dài MN, biết $AM + NC = 16$ (cm); Chu vi tam giác ABC bằng 75 (cm)

Giải

Câu 1

a) Tính đúng $x = 7; x = -3$

b) Tính đúng $x = 2007$

c) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x + 4 \cdot 8 = 0$
 $\Leftrightarrow 2^x(2^x - 4) - 8(2^x - 4) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(2^x - 4) = 0$
 $\Leftrightarrow (2^x - 2^3)(2^x - 2^2) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 2^3 = 0$ hoặc $2^x - 2^2 = 0$
 $\Leftrightarrow 2^x = 2^3$ hoặc $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 3; x = 2$

Câu 2:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{xy + yz + xz}{xyz} = 0 \Rightarrow xy + yz + xz = 0 \Rightarrow yz = -xy - xz$$

$$x^2 + 2yz = x^2 + yz - xy - xz = x(x-y) - z(x-y) = (x-y)(x-z)$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + 2xz = (y-x)(y-z); z^2 + 2xy = (z-x)(z-y)$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{xz}{(y-x)(y-z)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)}$$

Tính đúng $A = 1$

Câu 3:

a) $p = \left(\frac{x}{(x+2)(x-2)} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) : \frac{6}{x+2} = \frac{x - 2(x+2) + x - 2}{(x-2)(x+2)} : \frac{6}{x+2} = -\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-x}$

b) Với $x \neq 0; x \neq \pm 2$ thì biểu thức p xác định

$$|x| = \frac{3}{4} \text{ nên } x = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{3}{4}$$

+ Nếu $x = \frac{3}{4}$ thì $p = \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$

+ Nếu $x = -\frac{3}{4}$ thì $p = \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11}$

c) Với $p = 7$ thì $\frac{1}{2-x} = 7 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$ (thỏa mãn điều kiện của x)

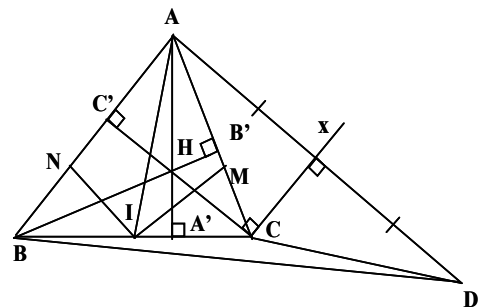
d) Để p có giá trị nguyên thì $2 - x$ phải là ước của 1.

Từ đó ta có: $x = 1; x = 3;$

Vậy để p nguyên lúc đó $x = 1; x = 3;$

Câu 4:

a) $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'}$



$$\text{Tương tự: } \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}, \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$$

$$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:

$$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$$

$$\frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$$

$$\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$$

c) Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

- Chứng minh được góc BAD vuông, $CD = AC$, $AD = 2CC'$

- Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$

- ΔBAD vuông tại A nên: $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$$

$$AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$$

$$4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$$

$$\text{Tương tự: } 4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$$

$$4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$$

- Chứng minh được: $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$$

(Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow BC = AC, AC = AB, AB = BC \Leftrightarrow AB = AC = BC$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều)

Câu 5:

$$\text{ta có: } \frac{GK}{BK} = \frac{1}{3}; \frac{BG}{BK} = \frac{2}{3}$$

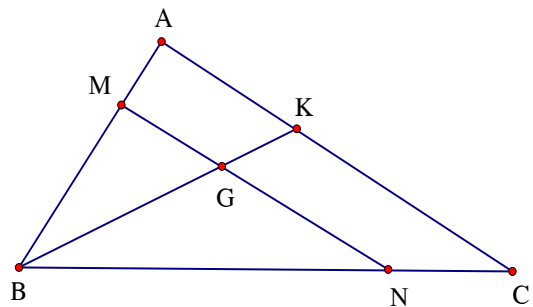
$$\text{Do } MN \parallel AC \text{ nên } \frac{AM}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{GK}{BK} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Mà } \frac{AM + NC}{AB + BC} = \frac{1}{3}$$

vì $AM + NC = 16$ (cm) và $AB + BC = 75 - AC$

$$\text{Do đó: } \frac{16}{75 - AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AC = 27 \text{ (cm)}$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{MN}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MN}{27} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = 18 \text{ (cm)}$$



CHUYÊN ĐỀ 16 – BẤT ĐẲNG THỨC

Phần I : các kiến thức cần lưu ý

1-Định nghĩa:
$$\begin{cases} A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \\ A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0 \end{cases}$$

2-tính chất

$+ A > B \Leftrightarrow B < A$ $+ A > B \text{ và } B > C \Leftrightarrow A > C$ $+ A > B \Rightarrow A + C > B + C$ $+ A > B \text{ và } C > D \Rightarrow A + C > B + D$ $+ A > B \text{ và } C > 0 \Rightarrow A.C > B.C$ $+ A > B \text{ và } C < 0 \Rightarrow A.C < B.C$ $+ 0 < A < B \text{ và } 0 < C < D \Rightarrow 0 < A.C < B.D$	$+ A > B > 0 \Rightarrow A^n > B^n \quad \forall n$ $+ A > B \Rightarrow A^n > B^n \text{ với } n \text{ lẻ}$ $+ A > B \Rightarrow A^n > B^n \text{ với } n \text{ chẵn}$ $+ m > n > 0 \text{ và } A > 1 \Rightarrow A^m > A^n$ $+ m > n > 0 \text{ và } 0 < A < 1 \Rightarrow A^m < A^n$ $+ A < B \text{ và } A.B > 0 \Rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{B}$
---	--

3 - một số hằng bất đẳng thức

- + $A^2 \geq 0$ với $\forall A$ (dấu = xảy ra khi $A = 0$)
- + $A^n \geq 0$ với $\forall A$ (dấu = xảy ra khi $A = 0$)
- + $|A| \geq 0$ với $\forall A$ (dấu = xảy ra khi $A = 0$)
- + $-|A| < A = |A|$
- + $|A+B| \geq |A|+|B|$ (dấu = xảy ra khi $A.B > 0$)
- + $|A-B| \leq |A|-|B|$ (dấu = xảy ra khi $A.B < 0$)

Phần II : một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1) Phương pháp 1: dùng định nghĩa

Kiến thức : Để chứng minh $A > B$ Ta chứng minh $A - B > 0$

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ với $\forall M$

Ví dụ 1 $\forall x, y, z$ chứng minh rằng :

- a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$
- b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

Giải:

a) Ta xét hiệu : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
 $= \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2] \geq 0$ đúng với mọi $x; y; z \in R$

Vì $(x-y)^2 \geq 0$ với $\forall x; y$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

$(x-z)^2 \geq 0$ với $\forall x; z$. Dấu bằng xảy ra khi $x = z$

$(y-z)^2 \geq 0$ với $\forall z; y$. Dấu bằng xảy ra khi $z = y$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$

b) Ta xét hiệu:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2 \geq 0$$

đúng với mọi $x; y; z \in R$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi $x; y; z \in R$

Dấu bằng xảy ra khi $x + y = z$

Ví dụ 2: chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ c) Hãy tổng quát bài toán

giải

a) Ta xét hiệu

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2(a^2+b^2)}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

Vậy $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

b) Ta xét hiệu: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$

Vậy $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

c) Tổng quát: $\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^2$

* Tóm lại các bước để chứng minh $A \geq B$ theo định nghĩa

Bước 1: Ta xét hiệu $H = A - B$

Bước 2: Biến đổi $H = (C+D)^2$ hoặc $H = (C+D)^2 + \dots + (E+F)^2$

Bước 3: Kết luận $A \geq B$

2) phương pháp 2 : Dùng phép biến đổi tương đương

Lưu ý:

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

Ví dụ 1: Cho a, b, c, d, e là các số thực chứng minh rằng

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$

Giải:

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2a - b)^2 \geq 0$ (BĐT này luôn đúng)

Vậy $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ (dấu bằng xảy ra khi $2a = b$)

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) > 2(ab + a + b)$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e) \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 4a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2 + (a-2c)^2 + (a-2d)^2 + (a-2e)^2 \geq 0$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$

Giải:

$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4) \Leftrightarrow a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12} \geq a^{12} + a^8b^4 + a^4b^8 + b^{12}$

$$\Leftrightarrow a^8 b^2 (a^2 - b^2) + a^2 b^8 (b^2 - a^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 b^2 (a^2 - b^2)(a^6 - b^6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 b^2 (a^2 - b^2)^2 (a^4 + a^2 b^2 + b^4) \geq 0$$

Ví dụ 4: cho ba số thực khác không x, y, z thỏa mãn:
$$\begin{cases} x.y.z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < x + y + z \end{cases}$$

Chứng minh rằng : có đúng một trong ba số x, y, z lớn hơn 1

Giải: Xét $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz + (xy + yz + zx) + x + y + z - 1$

$$= (xyz - 1) + (x + y + z) - xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = x + y + z - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) > 0$$

(vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < x + y + z$ theo gt) \rightarrow 2 trong 3 số $x-1, y-1, z-1$ âm hoặc cả ba số $x-1, y-1, z-1$

là dương.

Nếu trường hợp sau xảy ra thì $x, y, z > 1 \rightarrow x.y.z > 1$ Mâu thuẫn gt $x.y.z = 1$ bắt buộc phải xảy ra trường hợp trên tức là có đúng 1 trong ba số x, y, z là số lớn hơn 1

3) Phương pháp 3: dùng bất đẳng thức quen thuộc

A) một số bất đẳng thức hay dùng

1) Các bất đẳng thức phụ:

a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$ b) $x^2 + y^2 \geq |xy|$ dấu(=) khi $x = y = 0$

c) $(x + y)^2 \geq 4xy$ d) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

2) Bất đẳng thức Cô sy: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ Với $a_i > 0$

3) Bất đẳng thức Bunhiacopski

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^2$$

4) Bất đẳng thức Trê-bư - sếp:

$$\text{Nếu } \begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \leq B \leq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \geq \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{A + B + C}{3}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \geq B \geq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \leq \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{A + B + C}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ A = B = C \end{cases}$

B) các ví dụ

ví dụ 1

Cho a, b, c là các số không âm chứng minh rằng $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Giải: Dùng bất đẳng thức phụ: $(x + y)^2 \geq 4xy$

Tacó $(a + b)^2 \geq 4ab$; $(b + c)^2 \geq 4bc$; $(c + a)^2 \geq 4ac$

$$\Rightarrow (a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2 \geq 64a^2 b^2 c^2 = (8abc)^2 \Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$

ví dụ 2: Cho $a > b > c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$

$$\text{Do } a, b, c \text{ đối xứng, giả sử } a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{a+c} \geq \frac{c}{a+b} \end{cases}$$

áp dụng BĐT Trê- bu-sép ta có

$$a^2 \cdot \frac{a}{b+c} + b^2 \cdot \frac{b}{a+c} + c^2 \cdot \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \cdot \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2} \quad \text{Dấu bằng xảy ra khi } a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ví dụ 3: Cho $a, b, c, d > 0$ và $abcd = 1$. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + d(c+a) \geq 10$$

Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $c^2 + d^2 \geq 2cd$

Do $abcd = 1$ nên $cd = \frac{1}{ab}$ (dùng $x + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$)

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + cd) = 2\left(ab + \frac{1}{ab}\right) \geq 4 \quad (1)$$

Mặt khác:

$$a(b+c) + b(c+d) + d(c+a) = (ab + cd) + (ac + bd) + (bc + ad)$$

$$= \left(ab + \frac{1}{ab}\right) + \left(ac + \frac{1}{ac}\right) + \left(bc + \frac{1}{bc}\right) \geq 2 + 2 + 2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + d(c+a) \geq 10$$

ví dụ 4: Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

Xét cặp số $(1, 1, 1)$ và (a, b, c) ta có $(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1.a + 1.b + 1.c)^2$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \quad (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

4) Phương pháp 4: dùng tính chất của tỷ số

A. Kiến thức

1) Cho a, b, c là các số dương thì

$$\text{a) Nếu } \frac{a}{b} > 1 \text{ thì } \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c} \quad \text{b) Nếu } \frac{a}{b} < 1 \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$$\text{2) Nếu } b, d > 0 \text{ thì từ } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

B. Các ví dụ:

ví dụ 1: Cho $a, b, c, d > 0$

$$\text{Chứng minh rằng : } 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

$$\text{Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có } \frac{a}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác : } \frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$ (3)

Tương tự ta có : $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$ (4)

$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{b+c}{a+b+c+d}$ (5); $\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$ (6)

cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có

$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$ (đpcm)

ví dụ 2 : Cho: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b, d > 0$

Chứng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

Giải: Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$ (đpcm)

ví dụ 3 : Cho $a; b; c; d$ là các số nguyên dương thỏa mãn : $a + b = c + d = 1000$

tìm giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$

giải : Không mất tính tổng quát ta giả sử : $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{a+b}{c+d} \leq \frac{b}{d}$; $\frac{a}{c} \leq 1$ vì $a + b = c + d$

a, Nếu: $b \leq 998$ thì $\frac{b}{d} \leq 998 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \leq 999$

b, Nếu: $b = 998$ thì $a = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{1}{c} + \frac{999}{d}$ Đạt giá trị lớn nhất khi $d = 1$; $c = 999$

Vậy: giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = 999 + \frac{1}{999}$ khi $a = d = 1$; $c = b = 999$

Ví dụ 4 : Với mọi số tự nhiên $n > 1$ chứng minh rằng : $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}$

Ta có $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ với $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$

Do đó: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 5: CMR: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ với $n \geq 2$ không là số tự nhiên

HD: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}$; $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}$;.....

Ví dụ 6: Cho $a, b, c, d > 0$.Chứng minh rằng :

$$2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

Giải :

Vì $a, b, c, d > 0$ nên ta có: $\frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$ (1)

$\frac{b+c}{a+b+c+d} < \frac{b+c}{b+c+d} < \frac{b+c+a}{a+b+c+d}$ (2)

$$\frac{d+a}{a+b+c+d} < \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (3)$$

Cộng các vế của 4 bất đẳng thức trên ta có :

$$2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3 \quad (\text{đpcm})$$

5. Phương pháp 5: Dùng bất đẳng thức trong tam giác

Lưu ý: Nếu a; b; c là số đo ba cạnh của tam giác thì : a; b; c > 0

Và $|b-c| < a < b+c$; $|a-c| < b < a+c$; $|a-b| < c < b+a$

Ví dụ 1:

Cho a; b; c là số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng

a, $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b, $abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$

Giải

a) Vì a, b, c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có

$$\begin{cases} 0 < a < b+c \\ 0 < b < a+c \\ 0 < c < a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < a(b+c) \\ b^2 < b(a+c) \\ c^2 < c(a+b) \end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b) Ta có $a > |b - c| \Rightarrow a^2 > a^2 - (b - c)^2 > 0$

$$b > |a - c| \Rightarrow b^2 > b^2 - (c - a)^2 > 0$$

$$c > |a - b| \Rightarrow c^2 > c^2 - (a - b)^2 > 0$$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được: $a^2 b^2 c^2 > [a^2 - (b - c)^2][b^2 - (c - a)^2][c^2 - (a - b)^2]$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 > (a + b - c)^2 (b + c - a)^2 (c + a - b)^2 \Rightarrow abc > (a + b - c).(b + c - a).(c + a - b)$$

Ví dụ 2: (đổi biến số)

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (1)

Đặt $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$ ta có $a = \frac{y+z-x}{2}$; $b = \frac{z+x-y}{2}$; $c = \frac{x+y-z}{2}$

ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geq 3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 6 \text{ là Bđt đúng?}$$

Ví dụ 3: (đổi biến số)

Cho a, b, c > 0 và $a + b + c < 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$ (1)

Giải: Đặt $x = a^2 + 2bc$; $y = b^2 + 2ac$; $z = c^2 + 2ab$

Ta có $x + y + z = (a + b + c)^2 < 1$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$ Với $x + y + z < 1$ và $x, y, z > 0$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Rightarrow (x + y + z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

6) phương pháp làm trội :

Chứng minh BĐT sau :

$$a) \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} < \frac{1}{2}$$

$$b) 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} < 2$$

Giải :

$$a) \text{ Ta có : } \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1).(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

Cho n chạy từ 1 đến k .Sau đó cộng lại ta có

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1} \right) < \frac{1}{2} \quad (\text{đpcm})$$

$$b) \text{ Ta có : } 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n}$$

$$< 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) < 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad (\text{đpcm})$$

Bài tập về nhà:

1) Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

HD: Ta xét hiệu: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$

2) Cho a, b, c là số đo ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng : $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

$$(\text{HD: } \frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{a+b+c} = \frac{2a}{a+b+c} \text{ và } \frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c})$$

$$3) 1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < 2$$

áp dụng phương pháp làm trội

4) Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

$$\text{HD: } \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = c \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \geq 2c; \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} ?; \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} ?$$