Chương I
ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I . Tính chất cơ bản:

a. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ax > bx \text{ khi } x > 0 \\ ax < bx \text{ khi } x < 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} a > x \\ b > y \end{cases} \Rightarrow a + b > x + y$ Chú ý $\begin{cases} a > x \\ b > y \end{cases} \not\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - b > x - y \\ ab > xy \\ \dfrac{a}{b} > \dfrac{x}{y} \end{array} \right.$

c. $\begin{cases} a > x \geq 0 \\ b > y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ab > xy$

d. $a > b \geq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

Hệ quả: $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$

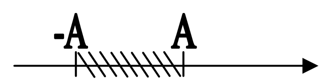
e. $a > b > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

$a < b < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

f. $A > 0$

- $|x| < A \Leftrightarrow -A < x < A$

- $|x| > A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -A \\ x > A \end{array} \right.$



II. Vài bất đẳng thức thông dụng:

Với a, b, c,… tùy ý ($a, b, c... \in R$)

a. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b$)

b. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c$)

c. Với $a, b > 0$ ta có: $(a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a + b}$

III. Các ví dụ:

<u>Ví dụ 1</u>: Cho $x, y \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left|\frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}\right| < 1$$

Giải:

$x, y \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$ thì $-1 < \tan x;\ \tan y < 1;\ 0 \leq \tan^2 x,\ \tan^2 y < 1$

Ta có: $\left|\dfrac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}\right| < 1$

$$\Leftrightarrow |\tan x - \tan y| > |1 - \tan x \tan y|$$
$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \tan^2 y - 2\tan x \tan y < 1 - 2\tan x \tan y + \tan^2 x \tan^2 y$$
$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \tan^2 y - \tan^2 x \tan^2 y - 1 < 0$$
$$\Leftrightarrow \tan^2 x(1 - \tan^2 y) - (1 - \tan^2 y) < 0$$
$$\Leftrightarrow (1 - \tan^2 y)(\tan^2 x - 1) < 0 \quad \text{(Luôn đúng } \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)\text{)}$$

Ví dụ 2:

Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$ thì:

$$\frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^c} \geq 3.\left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c}\right)$$

Giải:

Vì hàm số $\frac{1}{3^x}$ giảm nên ta có:

$$0 \geq (a-b)\left(\frac{1}{3^a} - \frac{1}{3^b}\right) \Rightarrow \frac{a}{3^b} + \frac{b}{3^a} \geq \frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{3^c} + \frac{c}{3^b} \geq \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c}; \ \frac{c}{3^a} + \frac{a}{3^c} \geq \frac{c}{3^c} + \frac{a}{3^a}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên (chú ý rằng $a + b + c = 1$), ta được:

$$\frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^c} - \left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c}\right) \geq 2\left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^c} \geq 3\left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c}\right) \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 3:

a. Cho $x > 0,\ y > 0$ và $xy \leq 1$. Chứng minh:

$$\frac{2}{1+\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \quad (1)$$

b. Cho $0 < a \leq b \leq c \leq d$ và $bd \leq 1$. Chứng minh:

$$\frac{4}{1+\sqrt[4]{abcd}} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d}$$

Giải:

a. Vì $x > 0,\ y > 0$ nên bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$2(1+x)(1+y) \geq (1+\sqrt{xy})(1+y) + (1+\sqrt{xy})(1+x)$$
$$\Leftrightarrow 2 + 2x + 2y + 2xy \geq 1 + \sqrt{xy} + y + y\sqrt{xy} + 1 + \sqrt{xy} + x + x\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow (x+y) + 2xy \geq \sqrt{xy}(x+y) + 2\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow (x+y) - \sqrt{xy}(x+y) + 2(xy - \sqrt{xy}) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(1-\sqrt{xy}) + 2\sqrt{xy}(\sqrt{xy} - 1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{xy})(x + y - 2\sqrt{xy}) \geq 0$$

$\Leftrightarrow (1-\sqrt{xy})(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ (2)

Vì: $\begin{cases}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \\ xy \leq 1 \Rightarrow 1-\sqrt{xy} \geq 0\end{cases}$ nên (2) đúng (đpcm)

b. $\begin{cases}a,b,c,d > 0 \\ a \leq b \leq c \leq d \\ bd \leq 1\end{cases}$ nên $\begin{cases}a,b,c,d > 0 \\ a \leq b \\ c \leq d \\ bd \leq 1\end{cases}$ $\Rightarrow ac \leq db \leq 1$

Theo kết quả câu a, ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+c} \leq \dfrac{2}{1+\sqrt{ac}} & (a,c>0; ac \leq 1) \\ \dfrac{1}{1+c}+\dfrac{1}{1+d} \leq \dfrac{2}{1+\sqrt{bd}} & (b,d>0; bd \leq 1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d} \leq 2.\left(\frac{1}{1+\sqrt{ac}}+\frac{1}{1+\sqrt{bd}}\right)$$

$$\leq 2.\frac{2}{1+\sqrt{ac}.\sqrt{bd}}$$

$$= \frac{4}{1+\sqrt{abcd}} \quad \text{(đpcm)}$$

<u>Ví dụ 4:</u>

Cho $a,\ b,\ c \in [-1;2]$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh:

$a^2+b^2+c^2 \leq 6$

Giải:

- $a \in [-1;2] \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 2 \Leftrightarrow (a+1)(a-2) \leq 0$

$\Leftrightarrow a^2-a-2 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq a+2$ (1)

- Tương tự ta cũng có $\begin{cases}b^2 \leq b+c & (2) \\ c^2 \leq c+2 & (3)\end{cases}$

Cộng (1), (2), (3) ta có:

$a^2+b^2+c^2 \leq (a+b+c)+6 = 6$ (đpcm)

<u>Ví dụ 5</u>:

Cho $x,y,z \in [0;2]$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$x^2+y^2+z^2 \leq 5$

Giải:

Ta có: $x,y,z \leq 2 \Rightarrow (x-2)(y-2)(z-2) \leq 0$

$\Leftrightarrow xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8 \leq 0$

$\Leftrightarrow xyz-2(xy+yz+zx)-4.(3)-8 \leq 0$

$\Leftrightarrow xyz \leq 2(xy+yz+zx)-4$ (vì $x+y+z=3$)

$\Leftrightarrow xyz \leq (x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)-4$

$\Leftrightarrow xyz \leq (x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)-4 = 3^2-(x^2+y^2+z^2)-4$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \le 5 - xyz$ (Vì $x+y+z=3$)

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le 5$ (Vì $xyz \ge 0$) (đpcm)

Ví dụ 6:

Cho $x>0,\ y>0,\ z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1} \le 1$ (1)

b. $\dfrac{1}{x+y+1}+\dfrac{1}{y+z+1}+\dfrac{1}{z+x+1} \le 1$ (2)

Giải:

a. Đặt T = vế trái của bất đẳng thức (1) (ta cần chứng minh $T \le 1$)

Ta có: $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$

Mà $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2-xy > xy \\ x+y>0 \text{ (Vì } x>0,\ y>0) \end{cases}$

Nên $(x+y)(x^2+y^2-xy) \ge (x+y)xy$ hay $x^3+y^3 \ge xy(x+y)$

$\Rightarrow x^3+y^3+1 \ge xy(x+y)+xyz$ (Vì $xyz=1$)

$\Leftrightarrow x^3+y^3+1 \ge xy(x+y+z) > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^3+y^3+1} \le \dfrac{1}{xy(x+y+z)}$ (a)

Tương tự ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y^3+z^3+1} \le \dfrac{1}{xy(x+y+z)} & \text{(b)} \\ \dfrac{1}{z^3+x^3+1} \le \dfrac{1}{xy(x+y+z)} & \text{(c)} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế (a), (b), (c), ta có:

$T \le \dfrac{1}{(x+y+z)}\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right) = \dfrac{1}{x+y+z}\left(\dfrac{x+y+z}{xyz}\right) = 1$ (Vì $xyz=1$) (đpcm)

b. Đặt S bằng vế trái của bất đẳng thức (2) (ta cần chứng minh $S \le 1$)

Đặt $\begin{cases} x=a^3 \\ y=b^3 \\ z=c^3 \end{cases}$ mà $\begin{cases} x,y,z>0 \Rightarrow a,b,c>0 \\ xyz=1 \Rightarrow a^3b^3c^3 \Leftrightarrow abc=1 \end{cases}$

$a,b,c>0$ và $abc=1$ nên theo kết quả câu a, ta có:

$$\dfrac{1}{a^3+b^3+1}+\dfrac{1}{b^3+c^3+1}+\dfrac{1}{c^3+a^3+1} \le 1$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y+1}+\dfrac{1}{y+z+1}+\dfrac{1}{z+x+1} \le 1$ (đpcm)

Ví dụ 7:

Cho $a,b>0$ và $b,c>0$. Chứng minh:

$$\sqrt{(a-c)c}+\sqrt{(b-c)c} \le \sqrt{ab} \quad (1)$$

Giải:

Bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$c(a-c)+(b-c)c+2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)}\le ab$$

$$\Leftrightarrow c^2+c^2-ac+ab-bc-2c\sqrt{(a-c)(b-c)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow c^2+a(b-c)-c(b-c)-2c\sqrt{(a-c)(b-c)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow c^2+(a-c)(b-c)-2c\sqrt{(a-c)(b-c)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[c-\sqrt{(a-c)(b-c)}\right]^2\ge 0$$ đây là bất đẳng thức đúng (đpcm)

<u>Ví dụ 8</u>:

Chứng minh rằng đối với mọi $a,b,c\in R$, ta có:

$$\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc \quad (1)$$

<u>Giải:</u>

Bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$a^2+4b^2+4c^2-4ac-8bc+4ac\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b+2c)^2\ge 0$$ đây là bất phương trình đúng (đpcm)

<u>Ví dụ 9</u>:

Cho $a^3>36$ và $abc=1$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{3}+b^2+c^2>ab+bc+ca \quad (1)$$

Giải:

Bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$\frac{a^2}{3}+(b+c)^2-2bc>a(b+c)+bc$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2-a(b+c)+\frac{a^2}{3}-3bc>0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2-a(b+c)+\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a}\right)>0 \text{ (Vì } bc=\frac{1}{a})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=b+c \\ f(x)=x^2-ax+\left(\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{3}{a}\right)>0 \quad (a)\end{cases}$$

Xét tam thức bậc hai $f(x)=x^2-ax+(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a})$ có:

$$\Delta=a^2-4\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a}\right)=\frac{36-a^3}{3a}<0 \quad (\text{Vì } a^3>36)$$

$$\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in R \Rightarrow (a)$$ đúng (đpcm)

<u>Ví dụ 10:</u>

Cho $-1<x<1$ và $n\in N,\ n>1$. Chứng minh:

$$(1-x)^2+(1+n)^n<2^n$$

Giải:

Vì $-1<x<1$ nên $x=\cos\alpha \quad (0<\alpha<\pi)$ lúc đó:

$$(1+n)^n+(1-n)^n=(1+\cos\alpha)^n+(1-\cos\alpha)^n$$

$$=\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^n+\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

$$=2^n\left[\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^n+\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^n\right]<2^n\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=2^n \quad \text{(đpcm)}$$

* **<u>Chú ý:</u>** Khi chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp biến đổi tương đương cần:
1. Chú ý xem kĩ giả thuyết đề cho, vì trong một số trường hợp có thể biến đổi giả thuyết đề cho thành bất đẳng thức cần chứng minh (như ở ví dụ 4, 5…).
2. Trong một số trường hợp có thể biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh thành một bất đẳng thức luôn đúng (được nêu ở ví dụ 1, 3, 7, 8…).
3. Nên thuộc lòng và bất đẳng thức thông dụng được giới thiệu ở phần II.

<u>IV. Bài tập tương tự:</u>

1. Chứng minh rằng: nếu $0<x\le y\le z$ thì:

$$y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}(x+z)\le\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(x+z)$$

<u>* Hướng dẫn:</u>

Tìm bất đẳng thức tương đương bằng cách quy đông mẫu số, ước lược số hạng $(x+z)$, chuyển vế, biến đổi vế trái thành dạng tích số,…

2. a, b, c, d là năm số thức tùy ý, chứng minh bất đẳng thức:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge ab+ac+ad+ac$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

<u>* Hướng dẫn:</u>

Tìm bất đẳng thức tương đương bằng cách biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng:

$$\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\ge 0$$

…

3. a, b, c, là độ dài ba cạnh của tam giác ABC, chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$$

<u>* Hướng dẫn:</u>

$$a<b+c \;\Rightarrow\; a^2<ab+ac,\; b<a+c \;\Rightarrow\; ...$$

4. Chứng minh:

$$a^2+b^2\ge 2ab,\ \forall a,b\in \mathrm{R}$$

Áp dụng a, b, c là ba số thực tùy ý, chứng minh:

$$a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$$

* Hướng dẫn:

Dùng công thức $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge \dots$

Áp dụng kết quả trên.

5. Chứng minh $\forall t \in [-1;1]$ ta có:

$\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t} \ge 1+\sqrt{1+t^2} \ge 2-t^2$

* Hướng dẫn

- Với $\forall t \in [-1;1]$, ta luôn có:

$(1-t)+2\sqrt{(1-t)(1+t)}+(1+t) \ge 1+2\sqrt{1-t^2}+(1-t^2)$

Biến đổi tương đương suy ra $\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t} \ge 1+\sqrt{1+t^2}$

- Từ: $0 \le \sqrt{1-t^2} \le 1$

$\Rightarrow 1+\sqrt{1+t^2} \ge 2-t^2$

Chương II
BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI (CAUCHY)

I. Phương pháp giải toán

1) Cho 2 số a,b > 0, ta có: $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi a = b.

2) Cho n số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \ge 0$ ta có:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2a_3\dots a_n}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

3) Bất đẳng thức côsi suy rộng

Phát biểu: Với các số thực dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là các số thực không âm và có tổng bằng 1, ta có:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\dots+a_nx_n \ge a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}\dots a_n^{x_n}$$

Tổng quát: Cho n số dương tùy ý a_i, $i = \overline{1,n}$ và n số hữu tỉ dương q_i, $i = \overline{1,n}$

thỏa $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ khi đó ta luôn có: $\prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \le \sum_{i=1}^{n} q_i.a_i$

Dấu "=" xảy ra

II. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho n số dương a_i, $i = \overline{1,n}$. Chứng minh rằng:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho các số $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ..., \frac{1}{a_n}$

Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} \ge \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}}$$

Nhân 2 vế tương ứng ta được bất đẳng thức cần chứng minh và dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

Ví dụ 2: Chứng minh với mọi a,b,c dương ta luôn có:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \ge \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho vế trái:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(a+c)(b+c)}} \quad (1)$$

Mà

$$3^3 abc \le (a+b+c)^3$$

$$3^3 (a+b)(b+c)(c+a) \le 8(a+b+c)^3$$

$$\Rightarrow abc(a+b)(b+c)(c+a) \le \frac{8}{3^6}(a+b+c)^6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{2}{9}(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt[9]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2} \qquad (2)$$

Từ (1)(2) đpcm
Dấu "=" xảy ra a = b = c

Ví dụ 3: Chứng minh với mọi số dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Giải

Ta có:

$$a^3+b^3 \geq ab(a+b)$$

Nên

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{abc}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{abc}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{abc}{bc(b+c)+abc} = \frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{abc}{a^3+c^3+abc} \leq \frac{abc}{ac(a+c)+abc} = \frac{b}{a+b+c}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$abc\left(\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\right) \leq 1$$

Hay

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc} \text{ (đpcm)}$$

III. Bài tập tương tự

1. Các số dương x, y, z có tích bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{xy}{x^5+xy+y^5}+\frac{yz}{y^5+yz+z^5}\frac{xz}{x^5+xz+z^5} \leq 1$$

*Hướng dẫn:

Ta có: $x^2+y^2 \geq 2xy$

$$\Rightarrow x^5+y^5 \geq 2\sqrt{x^5y^5} = 2x^2y^2\sqrt{xy} \geq (x+y)x^2y^2$$

Do đó :

$$\frac{xy}{x^5+xy+y^5} \le \frac{xy}{xy+(\text{x+y})x^2y^2} = \frac{1}{1+xy(x+y)} = \frac{z}{x+y+z}$$

Tương tự:

$$\frac{yz}{y^5+yz+z^5} \le \frac{x}{x+y+z}$$

$$\frac{xz}{x^5+xz+z^5} \le \frac{y}{x+y+z}$$

Cộng vế theo vế ta có đpcm. Dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

2. Với mọi x, y, z dương. Chứng minh :

$$\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{xz}+\frac{z^3}{xy} \ge x+y+z$$

*<u>Hướng dẫn:</u>

Áp dụng bất dẳng thức côsi, ta có:

$$\frac{x^3}{yz}+y+z \ge 3x$$

$$\frac{y^3}{xz}+x+z \ge 3y$$

$$\frac{z^3}{xy}+x+y \ge 3z$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{xz}+\frac{z^3}{xy}+2(x+y+z) \ge 3(x+y+z)$$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

3. Cho a,b,c là 3 số nguyên dương. Chứng minh:

$$(b+c)^a+(a+c)^b+(a+b)^c \le \left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right]^{a+b+c}$$

*<u>Hướng dẫn:</u>

Áp dụng bất đẳng thức côsi, ta có:

$$\underbrace{(b+c)+\ldots+(b+c)}_{\text{n lần}}+\underbrace{(a+c)+\ldots+(a+c)}_{\text{n lần}}+\underbrace{(a+b)+\ldots+(a+b)}_{\text{n lần}}$$

$$\ge (a+b+c).\sqrt[a+b+c]{(b+c)^a(a+c)^b(a+b)^c}$$

Hay :

$$\left[\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}\right]^{a+b+c} \ge (b+c)^a(a+c)^b(a+b)^c \quad (1)$$

Ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{2(a+b+c)}{3} \geq \frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c} \quad (2)$$

Thật vậy (2) $\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \text{ (đúng)}$$

Từ (1)(2), ta có đpcm

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

4. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

*<u>Hướng dẫn:</u>

Áp dụng bất đẳng thức côsi:

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{b+c-a+c+a-b)}{2}=c$$

Tương tự :

$$\sqrt{(a+b-c)(c+a-b)} \leq a$$

$$\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)} \leq b$$

Nhân vế theo vế ta được:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \geq 1 \ (1)$$

Ta lại dử dụng bất đẳng thức côsi:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}} \geq 3 \text{ do(1) (đpcm)}$$

Chương III
BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI (B.C.S)

I. Bất đẳng thức bunhiacopxki:

Cho 2 n số thực ($n \ge 2$)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Ta có: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2})(b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + \ldots + b_n^{\,2})$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$ hay $a_1 = kb_1;\ a_2 = kb_2;\ \ldots;\ a_n = kb_n$

Chứng minh:

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2}} \\ b = \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + \ldots + b_n^{\,2}} \end{cases}$

- Nếu $a = 0$ hay $b = 0$ thì bất đẳng thức luôn đúng
- Nếu $a, b > 0$:

Đặt: $\alpha_i = \dfrac{a_i}{a};\ \beta_i = \dfrac{b_i}{b}$ ($i = \overline{1, n}$)

Thế thì $\alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} + \ldots + \alpha_n^{\,2} = \beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2} + \ldots + \beta_n^{\,2} = 1$

Mà: $|\alpha_i\beta_i| \le \dfrac{1}{2}(\alpha_i^{\,2} + \beta_i^2)$

Suy ra: $|\alpha_1\beta_1| + |\alpha_2\beta_2| + \ldots + |\alpha_n\beta_n| \le \dfrac{1}{2}(a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2})(b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + \ldots + b_n^{\,2}) \le 1$

$\Rightarrow |a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_nb_n| \le ab$

Lại có: $|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \le |a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_nb_n|$

Suy ra: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2})(b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + \ldots + b_n^{\,2})$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = \beta_i \\ \alpha_1\beta_1, \ldots \alpha_n\beta_n \text{ cuøg daá} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

II. Các ví dụ:

Ví dụ 1:

Cho $a,\ b,\ c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S, ta có:

$$\left(\frac{a^2}{(\sqrt{b+c})^2}+\frac{b^2}{(\sqrt{c+a})^2}+\frac{c^2}{(\sqrt{a+b})^2}\right)\left((\sqrt{b+c})^2+(\sqrt{a+c})^2+(\sqrt{a+b})^2\right)\geq(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

Ví dụ 2:

Cho $a^2+b^2=1$. Chứng minh: $a\sqrt{b+1}+b\sqrt{a+1}\leq\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Giải:

Áp dụng 2 lần bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$(a\sqrt{b+1}+b\sqrt{a+1})^2\leq(a^2+b^2)(b+1+a+)=2+a+b$$

$$\leq 2+\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{a^2+b^2=2+\sqrt{2}} \quad \text{(do } a^2+b^2=1\text{)}$$

Vì vậy $a\sqrt{b+1}+b\sqrt{a+1}\leq\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{b+1}{a+1}\\ a=b\end{cases} \Rightarrow a=b$

Ví dụ 3:

Chứng minh rằng nếu phương trình

$x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ (1) cos nghiệm thì $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{4}{3}$

Giải:

Từ (1) ta có: $-(1+x^4)=ax^3+bx^2+cx$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S:

$$(1+x^4)^2=(ax^3+bx^2+cx)^2\leq(a^2+b^2+c^2)(x^6+x^4+x^2)$$

$$\Rightarrow(a^2+b^2+c^2)\geq\frac{(1+x^4)^2}{x^6+x^4+x^2} \quad (2)$$

Mặt khác: $\dfrac{(1+x^4)^2}{x^6+x^4+x^2}\geq\dfrac{4}{3}$ (3)

Thật vậy: (3) $\Leftrightarrow 3(1+2x^4+x^8)\geq 4(x^6+x^4+x^2)$

$\Leftrightarrow 3x^8-4x^6+2x^4-4x^2+3\geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)^2(3x^4+2x^2+3)\geq 0$ (luôn đúng)

Từ (2) và (3): $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{4}{3}$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c=\dfrac{2}{3} \ (x=1)\\ a=b=c=-\dfrac{2}{3} \ (x=-1)\end{array}\right.$

Ví dụ 4:

Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq 30$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S:

$$100=\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{\sqrt{ab}}.3\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{bc}}.3\sqrt{bc}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.3\sqrt{ca}\right)$$

$$\geq\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)(a^2+b^2+c^2+9ab+9bc+9ca)$$

$$=P\left[(a+b+c)^2+7(ab+bc+ca)\right]\leq P\left[1+\frac{7}{3}(a+b+c)^2\right]\leq\frac{10P}{3}\Rightarrow P\geq 30$$

Do: $a+b+c=1$ (theo giả thuyết)

$$\Rightarrow ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

<u>Ví dụ 5:</u>

Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

Giải:

Đặt: $a=\frac{1}{x};\ b=\frac{1}{y};\ c=\frac{1}{z}$. Khi đó từ $a,b,c>0$ và $abc=1\Rightarrow x,y,z>0$ và $xyz=1$

Bất đẳng thức đã cho đưa về dưới dạng sau:

$$\frac{x^3yz}{y+z}+\frac{y^3zx}{z+x}+\frac{z^3xy}{x+y}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}\quad\text{(do } xyz=1\text{) (1)}$$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S, ta có:

$$\Rightarrow\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)(y+z+z+x+x+y)\geq(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}\quad(2)$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z}{2(x+y+z)}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y+z=2x;\ z+x=2y;\ x+y=2z$

$\Leftrightarrow x=y=z$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Causi: $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$ (do $xyz=1$) (3)

Dấu " = " xảy ra khi $x=y=z$.

Từ (2) và (3) suy ra: $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}$. Vậy (1) đúng.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$ hay $a=b=c$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 6:

Cho ΔABC tùy ý có m_1, m_2, m_3 là độ dài 3 đường trung tuyến và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{9R}{m_1+m_2+m_3} \geq 2$$

Giải:

Ta có công thức đường trung tuyến:

$$m_a{}^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$\Rightarrow m_a{}^2 + m_b{}^2 + m_c{}^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

Mặt khác, trong mỗi tam giác ta có: $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$ (1)

Dấu "$=$" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

$$\Rightarrow m_a{}^2 + m_b{}^2 + m_c{}^2 \leq \frac{27}{4}R^2 \;\; (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S:

$$\Rightarrow \left(m_a+m_b+m_c\right)^2 \leq 3(m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2) \;\; (3)$$

Dấu "$=$" trong (3) xảu ra $\Leftrightarrow m_a = m_b = m_c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \left(m_a+m_b+m_c\right)^2 \leq \frac{81}{4}R^2$

$$\Leftrightarrow m_a+m_b+m_c \leq \frac{9R}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9R}{m_a+m_b+m_c} \geq 2$$

Dấu "$=$" xảy ra đồng thời trong (2) và (3) hay ΔABC đều.

Ví dụ 7:

Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{2(a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2)}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S, ta có:

$$\left(\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1+a_2}\right)\left[a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+...+a_n(a_1+a_2)\right] \geq (a_1+a_2+...+a_n)^2$$

Hay $\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_2a_4+...+a_na_1+a_na_2}$ (1)

Dấy "$=$" xảy ra: $\Leftrightarrow a_2+a_3 = a_3+a_4 = ... = a_n+a_1 = a_1+a_2$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$$

Do $a_1a_2 + a_1a_3 \le \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_3^2}{2} = a_1^2 + \frac{a_2^2 + a_3^2}{2}$

$$a_2a_3 + a_2a_4 \le a_2^2 + \frac{a_3^2 + a_4^2}{2}$$

...

$$a_na_1 + a_na_2 \le a_n^2 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$$

Cộng từng vế n bất đẳng thức trên ta có:

$\left(a_1a_2 + a_1a_3\right) + \left(a_2a_3 + a_2a_4\right) + ... + \left(a_na_1 + a_na_2\right) \le 2\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)$ (2)

Dấu " = " trong (2) xảy ra khi:

$a_1 = a_2 = ... = a_n$

Từ (1), (2) suy ra:

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

III. Bài tập tương tự:

1. Cho $ab + bc + ca = 4$. Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 \ge \frac{16}{3}$

*Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S hai lần:

$$(ab + bc + ca)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \le 3(a^4 + b^4 + c^4)$$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \ge \frac{16}{3}$ (do $ab + bc + ca = 4$).

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

2. Cho $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $xy + yz + xz \le 8$

*Hướng dẫn

Theo bất đẳng thức B.C.S, ta có:

$$18 = (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2) = \left[\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\right]\left[\frac{3}{4}z^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2\right]$$

$$\ge \left[\left(y + \frac{x}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}x\left(y + \frac{z}{2}\right)\right]^2 = \frac{3}{4}\left(xy + yz + xz\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(xy + yz + xz\right)^2 \le 64$$

$\Rightarrow$ đpcm.

3. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ có nghiệm thì:

$a^2+b^2\ge\frac{4}{5}$

*<u>Hướng dẫn</u>

Gọi x là nghiệm của phương trình đã cho:

$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ ($\Rightarrow x\ne0$)

Chia 2 vế cho $x^2>0$, ta được:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x},\ |t|\ge2$.

(1) $\Leftrightarrow t^2+at+b-2=0 \Leftrightarrow 2-t^2=at+b$

Áp dụng B.C.S: $\left(2-t^2\right)^2=\left(at+b\right)^2\le\left(a^2+b^2\right)\left(t^2+1\right)$

$$\Rightarrow a^2+b^2\ge\frac{\left(2-t^2\right)^2}{t^2-1}$$

Ta dễ chứng minh được: $\frac{\left(2-t^2\right)^2}{t^2-1}\ge\frac{4}{5}$ (dành cho bạn đọc tự chứng minh).

$$\Rightarrow a^2+b^2\ge\frac{4}{5}$$

4. Cho $x,y,z>0$ thỏa $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$T=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$$

*<u>Hướng dẫn</u>

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S:

+) $1=\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}\sqrt{z}+\sqrt{z}\sqrt{x}\le\sqrt{x+y+z}.\sqrt{x+y+z}=x+y+z$

+) $(x+y+z)^2=\left(\frac{x}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}\sqrt{y+z}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}\sqrt{z+x}\right)^2$

$\le\left(\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\right)\left(x+y+y+z+z+x\right)=2T(x+y+z)$

$\Rightarrow T\ge\frac{1}{2}\left(x+y+z\right)=\frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$

Vậy $Min(T)=\frac{1}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

5. Cho $x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2 y}{z}+\frac{y^2 z}{x}+\frac{z^2 x}{y} \geq x^2+y^2+z^2$$

*Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S:

$$\left(\frac{x^2 y}{z}+\frac{y^2 z}{x}+\frac{z^2 x}{y}\right)\left(\frac{x^2 z}{y}+\frac{y^2 x}{z}+\frac{z^2 y}{x}\right) \geq (x^2+y^2+z^2)^2$$

Xét hiệu:

$$A=\frac{x^2 y}{z}+\frac{y^2 z}{x}+\frac{z^2 x}{y}-\frac{x^2 z}{y}-\frac{y^2 x}{z}-\frac{z^2 y}{x}$$

$$=\frac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+xz)>0 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{x^2 y}{z}+\frac{y^2 z}{x}+\frac{z^2 x}{y} \geq x^2+y^2+z^2$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

6. Cho ΔABC, M là điểm bất kì trong tam giác. Gọi x, y, z, là các khoảng cách từ M xuống BC, AC, AB. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+z^2}{2R}}$$

*Hướng dẫn

Ta có: $S_{MBC}+S_{MCA}+S_{MAB}=S$

$$\Rightarrow \frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1$$

Ta có: $h_a+h_b+h_c=(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}\right)$

Theo bất đẳng thức B.C.S, suy ra:

$$h_a+h_b+h_c \geq \left(\sqrt{h_a}\sqrt{\frac{x}{h_a}}+\sqrt{h_b}\sqrt{\frac{y}{h_b}}+\sqrt{h_c}\sqrt{\frac{z}{h_c}}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{h_a+h_b+h_c} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \quad (1)$$

Do trong mọi tam giác nên ta có:

$h_a=b\sin C;\ h_b=c\sin A;\ h_c=a\sin B$ nên:

$$\sqrt{h_a+h_b+h_c}=\sqrt{h_a=b\sin C+h_b=c\sin A+h_c=a\sin B}=\sqrt{\frac{bc+ac+ab}{2R}}$$

Theo bất đẳng thức Causi:

$$\sqrt{h_a+h_b+h_c}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra đpcm.
Dấu " = " xảy ra khi ΔABC đều, M là trọng tâm tam giác.

Chương IV
BẤT ĐẲNG THỨC TRÊ – BƯ – SEP (TCHEBYCHEV)

I. Phát biểu

- Cho 2 dãy số $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ và $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$

+ Nếu 2 dãy số cùng tăng hoặc cùng giảm

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le b_3 \le ... \le b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge ... \ge b_n \end{cases}$$

Ta có: $\left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n\right) \le n(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n)$

+ Nếu 1 dãy tăng, 1 dãy giảm

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge ... \ge b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \le b_2 \le b_3 \le ... \le b_n \end{cases}$$

Ta có:

$$\left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n\right) \ge n(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_n \end{array}\right.$

II. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $a + b \ge 0$.

Chứng minh $(a+b)(a^3+b^3)(a^5+b^5) \le 4(a^9+b^9)$

Giải

Giả sử

$$a \geq b \Rightarrow \begin{cases} a^3 \geq b^3 \\ a^5 \geq b^5 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức trê – bư – sep, ta có:

$$\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)\left(\frac{a^5+b^5}{2}\right) \leq \frac{a^8+b^8}{2} \quad (1)$$

Nhân vế của (1) cho $\frac{a+b}{2} \geq 0$, ta có:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)\left(\frac{a^5+b^5}{2}\right) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a^8+b^8}{2}\right)$$

Cũng theo bất đẳng thức trê – bư – sep ta có:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a^8+b^8}{2}\right) \leq \left(\frac{a^9+b^9}{2}\right)$$

Suy ra:

$$\frac{(a+b)(a^3+b^3)(a^5+b^5)}{8} \leq \frac{a^9+b^9}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^3+b^3)(a^5+b^5) \leq 4(a^9+b^9)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Ví dụ 2: Cho dãy số dương trong đó : $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 1$

Chứng minh: $\frac{a_1^3}{s-a_1} + \frac{a_2^3}{s-a_2} + \ldots + \frac{a_n^3}{s-a_n} > \frac{1}{n-1}$

Với $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ do:

$$a_i > 0 - \forall i = 1,2,3,...,n \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 \geq a_2^2 \geq ... \geq a_n{}^2 \\ \dfrac{a_1}{s-a_1} \geq \dfrac{a_2}{s-a_2} \geq ... \geq \dfrac{a_n}{s-a_n} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức trê – bư – sep, ta có:

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+...+\frac{a_n}{s-a_n}\right) \leq n\left(\frac{a_1^3}{s-a_1}+\frac{a_2^3}{s-a_2}+...+\frac{a_n^3}{s-a_n}\right) (1) \text{ vì}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 1$$

Nên từ (1) suy ra:

$$\frac{a_1^3}{s-a_1}+\frac{a_2^3}{s-a_2}+...+\frac{a_n^3}{s-a_n} > \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+...+\frac{a_n}{s-a_n}\right) (2)$$

Mặt khác:

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+...+\frac{a_n}{s-a_n}$$

$$=\left(1+\frac{a_1}{s-a_1}\right)+\left(1+\frac{a_2}{s-a_2}\right)+...+\left(1+\frac{a_n}{s-a_n}\right)-n$$

$$=s\left(\frac{1}{s-a_1}+\frac{1}{s-a_2}+...+\frac{1}{s-a_n}\right)-n$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\left(s-a_1\right)+\left(s-a_2\right)+...+\left(s-a_n\right)\right]\left(\frac{1}{s-a_1}+\frac{1}{s-a_2}+...+\frac{1}{s-a_n}\right)-n \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$\left[\left(s-a_1\right)+\left(s-a_2\right)+...+\left(s-a_n\right)\right]\left(\frac{1}{s-a_1}+\frac{1}{s-a_2}+...+\frac{1}{s-a_n}\right) \geq n^2 \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) $\Rightarrow \dfrac{a_1^3}{s-a_1}+\dfrac{a_2^3}{s-a_2}+...+\dfrac{a_n^3}{s-a_n} > \dfrac{1}{n-1}$ (đpcm)

<u>Ví dụ 3</u>: Gọi $a_1, a_2, ..., a_n$ là các cạnh của n giác và gọi c là chu vi của đa giác

Chứng minh rằng : $\dfrac{a_1}{c-2a_1}+\dfrac{a_2}{c-2a_2}+...+\dfrac{a_n}{c-2a_n} \geq \dfrac{n}{n-2}$

Giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử:

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \Rightarrow \begin{cases} c-2a_1 \leq c-2a_2 \leq \ldots \leq c-2a_n \\ \dfrac{a_1}{c-2a_1} \geq \dfrac{a_2}{c-2a_2} \geq \ldots \geq \dfrac{a_n}{c-2a_n} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức trê – bư – sep, ta có

$$\left(\frac{a_1}{c-2a_1}+\frac{a_2}{c-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{c-2a_n}\right)\left[\left(c-2a_1\right)+\left(c-2a_2\right)+\ldots+\left(c-2a_n\right)\right] \geq n(a_1+a_2+\ldots+a_n)=nc \quad (1)$$

Mặt khác

$$\left(c-2a_1\right)+\left(c-2a_2\right)+\ldots+\left(c-2a_n\right)=nc-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)=(n-2)c$$

Thay vào (1) ta có: $\dfrac{a_1}{c-2a_1}+\dfrac{a_2}{c-2a_2}+\ldots+\dfrac{a_n}{c-2a_n} \geq \dfrac{nc}{(n-2)c}=\dfrac{n}{n-2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{c-2a_1}=\dfrac{a_2}{c-2a_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{c-2a_n} \\ c-2a_1=c-2a_2=\ldots=c-2a_n \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n$$

III. Bài tập tương tự

1.Cho $a,b,c>0$ chứng minh:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

*Hướng dẫn

Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $a \geq b \geq c > 0$

Suy ra $\begin{cases} b+c \leq a+c \leq a+b \\ \dfrac{a}{b+c} \geq \dfrac{b}{a+c} \geq \dfrac{c}{a+b} \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức trê – bư – sep cho 2 dãy: $b+c,\ a+c,\ a+b$ và $\dfrac{a}{b+c},\ \dfrac{b}{a+c},\ \dfrac{c}{a+b}$.

2. Cho a,b,c thỏa $a^2+b^2+c^2 \geq 1$ chứng minh :

$$\frac{a^3}{b+c},\ \frac{b^3}{a+c},\ \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$$

*Hướng dẫn

Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $a \geq b \geq c$

Suy ra $\begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \dfrac{a}{b+c} \geq \dfrac{b}{a+c} \geq \dfrac{c}{a+b} \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức trê – bư – sep cho 2 dãy:

$$a^2 \ge b^2 \ge c^2 \text{ và } \frac{a}{b+c} \ge \frac{b}{a+c} \ge \frac{c}{a+b}$$

Chương V
BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

I. <u>Phương pháp giải toán</u>

Cho $a \ge -1$, $1 \le n \in \mathbb{Z}$ thì $\left(1+a\right) \ge 1+na$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ n=1 \end{array}\right.$

<u>II. Các ví dụ</u>

<u>Ví dụ 1</u>: Cho $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 3$. Chứng minh $\sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n]{n+1}$

Giải:

Ta có: $\sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n]{n+1} \Leftrightarrow n^{\ n} > (n+1)^{n+1}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n > 1-\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow$ đpcm

<u>Ví dụ 2</u>: Cho a,b,c >0. chứng minh : $(b+c)^a + (c+a)^b + (a+b)^c > 2$ (*)

Giải:

- Nếu trong 3 số a,b,c có một số lớn hơn hoặc bằng 1 thì bất đẳng thức (*) luôn đúng.
- Nếu 0 < a, b, c < 1

  Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli:

$$\left(\frac{1}{b+c}\right)^a = \left(1+\frac{1-(b+c)}{b+c}\right)^a < 1+\frac{a\left[1-(b+c)\right]}{b+c} < \frac{a+b+c}{b+c}$$

$$\Rightarrow \qquad (b+c)^a > \frac{b+c}{a+b+c} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự :

$$(c+a)^b > \frac{a+c}{a+b+c} \quad (2)$$

$$(a+b)^c > \frac{a+b}{a+b+c} \quad (3)$$

Cộng (1)(2)(3) ta được: $(b+c)^a + (c+a)^b + (a+b)^c > 2$ (đpcm)

Ví dụ 3: Cho a,b,c > 0. chứng minh rằng : $\frac{a^5+b^5+c^5}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5$ (1)

Giải:

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 3$

Áp dụng bất đẳng thức bernoulli:

$$\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5 = \left(1+\frac{b+c-2a}{a+b+c}\right)^5 \geq 1+\frac{5(b+c-2a)}{a+b+c} \quad (2)$$

Chứng minh tương tự:

$$\left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 = \left(1+\frac{a+c-2b}{a+b+c}\right)^5 \geq 1+\frac{5(a+c-2b)}{a+b+c} \quad (3)$$

$$\left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 = \left(1+\frac{a+b-2c}{a+b+c}\right)^5 \geq 1+\frac{5(a+b-2c)}{a+b+c} \quad (4)$$

Cộng (2)(3)(4) ta được:

$$\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 3$$

$\Rightarrow$ đpcm

III. Bài tập tương tự:

1. Chứng minh rằng với mọi n = 1,2,…ta có:

a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3-\frac{3}{n+2}$

* Hướng dẫn:

a) Biến đổi $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}$ thành $\dfrac{n+2}{n+1}\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n$

b) Dùng qui nạp, sau đó áp dụng bất đẳng thức bernoulli :

$\left(1+\dfrac{1}{k^2+2k}\right)^k \geq \dfrac{k+3}{k+2}$

2. Cho 2 số tự nhiên a < b < c. chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n>a, ta có bất đẳng thức : $a^n + b^n < c^n$ (*)

*Hướng dẫn:

Viết bất đẳng thức (*) dưới dạng tương đương $\left(\dfrac{c}{b}\right)^n > 1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

3. Chứng minh rằng $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$, $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$

*Hướng dẫn:

Biến đổi $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$ thành $\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$

4. Chứng minh rằng nếu $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, thì ta có:

$$(2+\sin\alpha)^{2+\tan\alpha} > (3+\tan\alpha)^{1+\sin\alpha} \quad (1)$$

*Hướng dẫn:

Đặt $x = 1+\sin\alpha$, $y = 2+\tan\alpha$

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow (1+x)^y > (1+y)^x$

Chương VI
ÁP DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I. Phương pháp giải toán:

Giả sử cần chứng minh bất đẳng thức $f(x)$ > g(x), x$\in$(a;b)

Xét hàm số h(x) = $f(x) - g(x)$ với x$\in$[a;b]

- Nếu $h(x)$ đồng biến trên (a;b) thì $h(x) > h(a), \forall$ x$\in$(a;b)

- Nếu $h(x)$ nghịch biến trên (a;b) thì $h(x) > h(b)$ hoặc $h(x) < h(a)$ với $\forall x \in (a;b)$

II. Các ví dụ:

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng $\tan x > \sin x$, $\forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$

Giải:

Xét hàm số $f(x) = \tan x - \sin x$ với $x \in [0;\frac{\pi}{2})$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\cos x} - \cos x$

$= \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x} \geq 0 \quad (\forall x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]\ )$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x) > f(0)$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Hay $\tan x - \sin x > 0$, $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \tan x > \sin x \quad \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ví dụ 2:

Chứng minh $e^x \geq 1 + x$, $\forall x > 0$

Giải:

Xét hàm số $f(x): e^x - 1 - x$ với $x \in [0;+\infty)$

Ta có: $f'(x) = e^x - 1 > e^0 - 1 = 0$, $\forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(x) > f(0) \ (\forall x > 0)$

Hay $e^x - 1 - x > 0 \quad (\forall x > 0)$

$\Rightarrow e^x > 1 + x \quad (\forall x > 0)$

Ví dụ 3:

Chứng minh với mọi ΔABC nhọn ta luôn có sinA + sinB + sinC +2(tanA+tanB+tanC)>3π.

Giải:

Xét hàm số $f(x) = \sin x + 2\tan x - 3x$ với $x \in [0;\frac{\pi}{2}\Big)$

Ta có: $f'(x) = \cos x + \frac{2}{\cos^2 x} - 3$

$$= \frac{\cos^3 x - 3\cos^2 x + 2}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - 2\cos x - 2)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x - 1)(-\sin^2 x - 2\cos x - 1)}{\cos^2 x} \geq 0$$

(Vì $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2})$, $\cos x - 1 \leq 0$, $-\sin^2 x - 2\cos x - 1 \leq 0$)

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x) > f(0)$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Hay $\sin x + 2\tan x - 3x > 0$ (1)

Trong bất đẳng thức (1), thay x lần lượt bởi A, B, C với A. B, C là số đo 3 goc nhọn ΔABC

Ta có: $\sin A + 2\tan A - 3A > 0$

$\sin B + 2\tan B - 3B > 0$

$\sin C + 2\tan C - 3C > 0$

Cộng vế theo vế ta được:

$\sin A + \sin B + \sin C + 2(\tan A + \tan B + \tan C) - 3(A + B + C) > 0$

$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C + 2(\tan A + \tan B + \tan C) - 3\pi > 0$

Ví dụ 4:

Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$2^{\sin\alpha} + 2^{\tan\alpha} > 2^{\alpha} + 1$

Giải:

Do $2^{\sin\alpha}, 2^{\tan\alpha} \geq 2\sqrt{2^{\sin\alpha} + 2^{\tan\alpha}}$ (1)

Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ với $x \in [0; \frac{\pi}{2})$

Ta có:

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

$$= \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x} > 0$$

(Vì với $x \in [0; \frac{\pi}{2})$, $\cos x - 1 \leq 0$, $\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$)

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2})$

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(\alpha) > f(0)$

Hay $\sin\alpha + \tan\alpha - 2\alpha > 0$

$\Rightarrow \sin\alpha + \tan\alpha > 2\alpha$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có:

$2^{\sin\alpha} + 2^{\tan\alpha} > 2\sqrt{2^{\alpha}} = 2^{\alpha+1}$ (đpcm)

Ví dụ 5:

Cho $0 < \alpha < \beta < \sqrt{6}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} > \frac{\beta - \frac{\beta^3}{6}}{\alpha - \frac{\alpha^3}{6}}$$

Giải:

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6}}{\sin x}$ với $x \in (0;\pi)$

Ta có: $f'(x) = \frac{\sin x - \frac{x^2}{2}\sin x - x\cos x + \frac{x^3\cos x}{6}}{\sin^2 x}$ (1)

Đặt : $g(x) = \sin x - \frac{x^2}{2}\sin x - x\cos x + \frac{x^3\cos x}{6}$

$\Rightarrow g'(x) = \cos x - x\sin x - \frac{x^2}{2}\cos x - \cos x + x\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x - \frac{x^3\sin x}{6}$

$= \frac{-x^3\sin x}{6} < 0$, $\forall x \in (0;\pi)$

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(0;\pi)$

$\Rightarrow g(x) < g(0)$, $\forall x \in (0;\pi)$

Hay $\sin x - \frac{x^2}{2}\sin x - x\cos x + \frac{x^3\cos x}{6} < 0$, $\forall x \in (0;\pi)$.

Theo (1) $\Rightarrow f'(x) < 0$, $\forall x \in (0;\pi)$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(0;\pi)$.

Do $\pi > \sqrt{6} \Rightarrow 0 < \alpha < \beta < \pi$

$\Rightarrow f(\alpha) > f(\beta)$

Hay $\frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{6}}{\sin\alpha} > \frac{\beta - \frac{\beta^3}{6}}{\sin\beta}$

Do $\sin\alpha > 0, \sin\beta > 0$

$\alpha - \frac{\alpha^3}{6} > 0, \beta - \frac{\beta^3}{6} > 0$ $(0 < \alpha < \sqrt{6})$

$$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} > \frac{\beta - \frac{\beta^3}{6}}{\alpha - \frac{\alpha^3}{6}} \quad (0 < \alpha < \beta < \sqrt{6})\,(\text{đcpcm})$$

<u>Ví dụ 6</u>:

Cho $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, $x > 0$

a. Chứng minh rằng: $x - \dfrac{x^2}{2} < f(x) < x$, $\forall x > 0$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + f\left(\dfrac{2}{n^2}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)\right)$

Giải:

a. $\forall x > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < 1 \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} < x$

$\Rightarrow f(x) < x$ (1)

Mặt khác:

Xét $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$ với $x > 0$

Ta có: $g'(x) = \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2}}\right] > 0$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow g(x) > g(0)$, $\forall x > 0$

Hay $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) > 0$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} > 1 - \dfrac{x}{2}$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} > x - \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow f(x) > x - \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x > 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x - \dfrac{x^2}{2} < f(x) < x$, $\forall x > 0$ (đpcm)

b. Đặt $S_n = f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + f\left(\dfrac{2}{n^2}\right) + \ldots f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)$

Từ câu a: $x - \dfrac{x^2}{2} < f(x) < x$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow \dfrac{i}{n^2} - \dfrac{i^2}{2n^4} < f\left(\dfrac{i}{n^2}\right) < \dfrac{i}{n^2} \quad (i = \overline{1,n})$

$$\Rightarrow \frac{1+2+...+n}{n^2}-\frac{1^2+2^2+...+n^2}{2n^4}<\mathrm{S_n}<\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{(n+1)(2n+1)}{6.2.n^4}<\mathrm{S_n}<\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12.n^3}<\mathrm{S_n}<\frac{n+1}{2n}$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{n+1}{n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}]=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\mathrm{S_n}=\frac{1}{2}$$

III. Bài tập tương tự:

1. Chứng minh rằng $\cos\alpha+\alpha\cos\alpha>1$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Hướng dẫn:

Xét hàm số $f(x)=\cos x+x\sin x-1$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Chứng minh $f(x)>0$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2. Chứng minh rằng nếu ΔABC có 3 góc nhọn thì:
$\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>2\pi$

Hướng dẫn:

Xét hàm số $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Chứng minh $f(x)>0$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Thay x bằng A, B, C rồi cộng lại.

3. Chứng minh rằng $2^{2\sin x}+2^{\tan x}>2^{\frac{3x}{2}+1}$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức cosi cho 2 số dương $2^{2\sin x}$, $2^{\tan x}$.

Xét hàm số $f(x)=2\sin x+\tan x-3x$ với $x\in(0;\frac{\pi}{2})$

4. Cho $a\le 6,\ b\le 8,\ c\le 3$. Chứng minh rằng với mọi $x\ge 1$ ta đều có $x^4\ge ax^2+bx+c$

Hướng dẫn:

Xét hàm số $f(x)=x^4-ax^2-bx-c$, $\forall x\ge 1$

Chứng minh: $f(x)>f(1)=1$

5. Chứng minh rằng: $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

a. $\sin x<x$

b. $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$

c. $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$

* Hướng dẫn:

a. Xét hàm số $f(x) = x - \sin x$, $\forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

b. Xét hàm số $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$, $\forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

(Dựa vào câu a)

c. Theo câu b: $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right)^3$, xét hàm số $h(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cos x$, $\forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Chương VII
ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

I. Những điều cần lưu ý

- $\vec{a} = (x, y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $|\vec{u}| - |\vec{v}| \le |\vec{u} + \vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng.

Tương tự : $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|$

$|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$

II. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \ge 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Giải:

Xét : $\vec{u} = (a + c;\ b)$, $\vec{v} = (a + c;\ b) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (2a;\ 2b)$

Suy ra : $\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(a+c)^2 + b^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \\ |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

Mà:

$$\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \ge \left|\vec{u} + \vec{v}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \ge 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

<u>Ví dụ 2:</u> $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10} \ge 5 \quad (1)$$

Giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} \ge 5$

Xét : $\vec{u} = (x+3;\ 2y),\quad \vec{v} = (1-x;\ 3-2y)$

$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (4;3)$

Ta có:

$$\begin{cases} \left|\vec{u}\right| = \sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} \\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} \\ \left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \sqrt{16+9} = 5 \end{cases}$$

Mà :

$$\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \ge \left|\vec{u} + \vec{v}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} \ge 5$$

$\Rightarrow$ (đpcm)

<u>III. Bài tập tương tự:</u>

1. Giả sử x, y thỏa $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$ (*)

   Chứng minh xy+yz+xz ≤ 8

<u>*Hướng dẫn</u>

Xét:

$$\begin{cases} \vec{u} = (y + \frac{x}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}x) \\ \vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}x;\ y + \frac{z}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = yz\frac{\sqrt{3}}{2} + xz\frac{\sqrt{3}}{4} + xy\frac{\sqrt{3}}{2} + xz\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + xz)$$

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{y^2 + \frac{x^2}{4} + xy + \frac{3}{4}x^2} = \sqrt{3} \qquad \text{do } (*)$$

$$\left|\vec{\mathrm{v}}\right| = \sqrt{\frac{3}{4}z^2 + y^2 + yz + \frac{z^2}{4}} = \sqrt{16} \qquad \text{do}(*)$$

Mà :

$$\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{\mathrm{v}}\right| \geq \left|\vec{u}.\vec{v}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{48} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\ (xy + yz + xz)$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + xz \leq 8$$

2 .Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$. Chứng minh : $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$

<u>*Hướng dẫn</u>: Vế trái biến đổi thành: $\sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2} + \sqrt{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}z^2}$

2. Cho $a, b, c > 0,\ ab + bc + ac = abc$. Chứng minh :

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ac} \geq \sqrt{3}$$

<u>Hướng dẫn</u>: Vế trái biến đổi thành : $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}}$

Chương VIII:
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG QUY NẠP HOẶC PHẢN CHỨNG

I. Phương pháp giải toán:

* Quy nạp:

Muốn chứng minh mệnh đề $P_{(n)}$ phụ thuộc vào $n \in N$, đúng $\forall n \geq n_o$(n_o hằng số $\in N$), ta thực hiện 3 bước sau:

Bước 1: $n = n_o$: Chứng minh $p_{(n)}$ đúng.

Bước 2: $n = k$ ($k \in N$): giả sử $p_{(k)}$ đúng.

Bước 3: $n = k + 1$: Chứng minh $p_{(k+1)}$ đúng. Nguyên lý quy nạp cho phép ta kết luận, $p_{(n)}$ đúng $\forall n \geq n_o$. Đặc biệt: nếu $n_o = 1$ thì kết luận $p_{(n)}$ đúng $\forall n \in N$.

* **Phản chứng**:

Ta gọi một mệnh đề cần chứng minh là luận đề: "$G \Rightarrow K$"

Phép toán mệnh đề cho ta:

$$\overline{G \Rightarrow K} = \overline{\overline{G} \vee K} = G \wedge \overline{K} = G\overline{K}$$

Như vậy, muốn phủ định luận đề ta ghép tất cả giả thiết của luận đề với phủ định kết luận của nó.

Ta thường dùng 5 hình thức chứng minh phản chứng như sau:

1. Dùng mệnh đề phản đảo: $\overline{K} \Rightarrow \overline{V}$.
2. Phủ định luận đề rồi suy ra điều trái giả thiết: $G\overline{K} \Rightarrow \overline{G}$.
3. Phủ định luận đề rồi suy ra điều trái với một điều đúng: $G\overline{K} \Rightarrow S$.
4. Phủ định luận đề rồi suy ra hai điều trái nhau: $G\overline{K} \Rightarrow C\overline{C}$
5. Phủ định luận đề suy ra kết luận của luận đề $G\overline{K} \Rightarrow K$.

II. Các ví dụ:

*Quy nạp:

Ví dụ 1: Cho $n \in N,\ n \geq 1,\ a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq \frac{1}{2}$. Hãy chứng minh:

$$(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n) \geq \frac{1}{2}$$

Giải:

* $n = 1: a_1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - a_1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ Bài toán đúng.

* $n = k \in N$: Giả sử bất đẳng thức đúng là:

$$(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_k) \geq \frac{1}{2}$$

* $n = k+1$: Ta cần chứng minh $(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_{k+1}) \geq \frac{1}{2}$.

Ta có: $(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_{k+1})$

$$= (1-a_1)...(1-a_{k-1})\left[1-(a_k - a_{k+1}) + a_k a_{k+1}\right]$$

$$\geq (1-a_1)...(1-a_{k-1})\left[1-(a_k - a_{k+1})\right] \geq \frac{1}{2}$$

(Vì: $a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + (a_k + a_{k+1}) \leq \frac{1}{2}$)

Suy ra: Bất đẳng thức đúng với $n = k+1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: Cho $n \in N$, $n \geq 1$, $a_i > 0, i = 1, 2, ..., n$. Hãy chứng minh:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Giải:

* $n = 1: a_1 . \frac{1}{a_1} = 1^2$: Bất đẳng thức luôn đúng.

* $n = k$: Giả sử bất đẳng thức đúng là:

$$\left(a_1+a_2+...+a_k\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}\right)\geq k^2$$

* $n=k+1$: Ta xét:

$$\left(a_1+a_2+...+a_{k+1}\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\left(a_1+a_2+...+a_k\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}\right)+\left(a_1+a_2+...+a_k\right)\frac{1}{a_{k+1}}+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}\right)+1$$

$$\geq k^2+\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_2}\right)+...+\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$$

$$\geq k^2+2k+1=\left(k+1\right)^2$$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng với $n=k+1$

$\Rightarrow$đpcm

<u>Ví dụ 3:</u> Chứng minh rằng:

$$n^n>\left(n+1\right)^{n-1},\forall n\in Z, n\geq 2$$

Giải:

* $n=2\Rightarrow\begin{cases}n^n=4\\ \left(n+1\right)^{n-1}=3\end{cases}\Rightarrow n^n>\left(n+1\right)^{n-1}$

* $n=k\geq 2$: Giả sử bất đẳng thức đúng là: $k^k\geq\left(k+1\right)^{k-1}$

* $n=k+1$: Ta xét:

$$\begin{aligned}k^k\left(k+1\right)^{k+1}&\geq\left(k+1\right)^{k-1}\left(k+1\right)^{k+1}\\&=\left(k+1\right)^{2k-2}\left(k+1\right)^2\\&=\left[\left(k+1\right)^2\right]^{k-1}\left(k+1\right)^2\\&>\left(k^2+2k\right)^{k-1}\left(k^2+2k\right)\text{ vì: }\left(k+1\right)^2=k^2+2k+1>k^2+2k\\&\geq k^k\left(k+2\right)^k\Rightarrow\left(k+1\right)^{k+1}>\left(k+2\right)^k\Rightarrow\text{ Bất đẳng thức đúng với }n=k+1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

<u>Ví dụ 4:</u>

Cho $n\in Z,\ n\geq 1,\ a,b\geq 0$. Hãy chứng minh:

$$\frac{a^n+b^n}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

Giải:

* n = 1: Bất đẳng thức luôn đúng.

* $n=k\in N$: Giả sử bất đẳng thức đúng, tức là: $\frac{a^k+b^k}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^k$

* $n=k+1$: Ta cần chứng minh $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$

Thật vậy: Ta có: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}=\frac{a+b}{2}.\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k}\le\frac{a+b}{2}.\frac{a^k+b^k}{2}$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{a^k+b^k}{2}\le\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^k+b^k\right)\le 2\left(a^{k+1}+b^{k+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow ab^k+a^kb\le a^{k+1}+b^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow a\left(a^k-b^k\right)-b\left(a^k-b^k\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^k-b^k\right)\ge 0$ (luôn đúng).

* Phản chứng:

Ví dụ 1: Cho 4 số a, b, c, d thỏa điều kiện: $ac\ge 2(b+d)$ (1). Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau là sai: $a^2<4b;\ c^2<4d$.

Giải:

Giả sử hai bất đẳng thức $a^2<4b$ và $c^2<4d$ đều đúng, cộng vế với vế hai bất đẳng thức trên ta được: $a^2+\ c^2<2ac\Leftrightarrow (a-c)^2<0$ vô lý.

Vậy có ít nhất một trong hai bất đẳng thức $a^2<4b$ và $c^2<4d$ là sai.

Ví dụ 2: Cho các số a, b, c thỏa điều kiện:

$$\begin{cases} a+b+c>0 & (1)\\ ab+bc+ca>0 & (2)\\ abc>0 & (3)\end{cases}$$

Chứng minh rằng $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Giải:

Giả sử $a\le 0$, từ (3) ta phải có $a\ne 0$ do đó $a<0$, cũng từ (3) và $a<0$ suy ra $bc<0$

Từ (2) suy ra $a(b+c)=-bc>0\Rightarrow b+c<0$ (vì $a<0$)

Suy ra $a+b+c<0$ vô lý với (1).

Vậy $a<0$, tương tự ta cũng có $b>0,\ c>0$.

Ví dụ 3: Cho $0<a,b,c<2$. Chứng minh có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là sai: $a(2-b)>1;\ b(2-c)>1;\ c(2-a)>1$.

Giải:

Giả sử các bất đẳng thức trên đều đúng, khi đó nhân vế với vế các bất đẳng thức lại với nhau ta được: $a(2-b)b(2-c)c(2-a)>1$

Ta lại có:

$$a(2-b)=2a-a^2=1-\left(a^2-2a+1\right)=1-(a-1)^2\le 1$$

Tương tự: $b\left(2-c\right)\le 1$ và $c\left(2-a\right)\le 1$

Do $0<a,b,c<2$ nên:

$a\left(2-b\right)>0;\ \ b\left(2-c\right)>0;\ \ c\left(2-a\right)>0$

Và lúc đó ta có: $a\left(2-b\right)b\left(2-c\right)c\left(2-a\right)\le 1$, mâu thuẫn với (1). Vậy có ít nhất một trong các bất đẳng thức đã cho là sai.

Ví dụ 4: Cho $\begin{cases} a+b+c>0 \\ ab+bc+ca>0 \\ abc>0 \end{cases}$. Hãy chứng minh: $a,b,c>0$.

Giải:

Giả sử ngược lại, trong 3 số a, b, c có (ít nhất) một số ≤ 0. Vì b, c vài trò như nhau, ta có thể xem $a\le 0$.

* $abc>0\Rightarrow a<0,\ bc<0$
* $a\left(b+c\right)=ab+ca>-bc>0$

$\Rightarrow b+c<0$. Vậy: $a+b+c<0\Rightarrow$ vô lý. Vậy: $a,\ b,\ c>0$.

III. Bài tập tương tự:

* Quy nạp:

1. Cho $x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},...,\ x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}$ (gồm n căn). Chứng minh rằng: $\sqrt{2}\le x_n<2$.

* Hướng dẫn:

Áp dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $\sqrt{2}\le x_{k+1}<2$ từ đó suy ra đpcm.

2. Chứng minh rằng: $\left|\sin nx\right|\le n\left|\sin x\right|,\ \forall n\in N^*,\ \forall x\in R$.

* Hướng dẫn:

Áp dụng phương pháp quy nạp và các tính chất:

$$\begin{cases} \left|a+b\right|\le\left|a\right|+\left|b\right|,\ \forall a,b\in R \\ \left|\sin x\right|,\left|\cos x\right|\le 1,\ \forall\alpha\in R \end{cases}$$

Để chứng minh $\left|\sin(k+1)x\right|\le(k+1)\left|\sin x\right|$ từ đó suy ra đpcm.

3. Cho $n\in N$, Chứng minh rằng: $e^x\ge 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!},\ \forall x\ge 0$

* Hướng dẫn:

Để chứng minh $e^x\ge 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{k+1}}{\left(k+1\right)!}$ ta xét hàm số:

$f(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{k+1}}{\left(k+1\right)!}\right)$ xét $f'(x)$ từ đó suy ra $f(x)\ge f(0)$ hay

$$e^x\ge 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{k+1}}{\left(k+1\right)!}$$

4. a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác vuông với c là cạnh huyền. Chứng minh rằng: $a^{2n}+b^{2n}\le c^{2n}$, $n\in Z^{+}$.

* Hướng dẫn:

Áp dụng quy nạp: với n = k+1:

$$a^{2(k+1)}+b^{2(k+1)}=\left(a^{2k}+b^{2k}\right)\left(a^{2}+b^{2}\right)-a^{2}b^{2k}-b^{2}a^{2k}\le c^{2k}c^{2}=c^{2(k+1)}$$

5. Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$ $(n>1)\,(1)$

b. $\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{5}{6}...\dfrac{2n-1}{2n}\le\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $(n\ge 1)\,(2)$

* Hướng dẫn:

a. Sử dụng quy nạp để chứng minh:

Với n = 2 thì (1) đúng, giả sử (1) đúng với n = k, chứng minh (1) đúng với $n=k+1$.

Với $n=k+1$, biến đổi vế trái ta được:

$$\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k-1}$$

$$>\frac{13}{24}+\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}>\frac{13}{24}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

b. Sử dụng quy nạp: với n = 1 thì (2) đúng, giả sử (2) đúng với n = k, chứng minh (2) đúng với $n=k+1$. Với $n=k+1$, biến đổi vế trái ta được:

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n+1}{2n+2}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.\frac{2n+1}{2n+2}$$

Ta cần chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}.\dfrac{2n+1}{2n+2}<\dfrac{1}{\sqrt{3n+4}}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{2}<\frac{3n+1}{3n+4}$$

$$\Leftrightarrow(2n+1)^{2}(3n+4)<(2n+2)^{2}(3n+1)$$

$$\Leftrightarrow 0<n \text{ (luôn đúng)}$$

Từ đây suy ra đpcm.

* Phản chứng:

1. Cho ba số dương x, y, z thỏa điều kiện xyz = 1.

Chứng minh rằng nếu: $x+y+z>\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ thì có một và chỉ một trong ba số này lớn hơn 1.

* Hướng dẫn:

Xét tích $(x-1)(y-1)(z-1)$ từ đó suy ra chỉ có một và chỉ một trong ba số $x-1$; $y-1$; $z-1$ dương. Nếu cả ba số đều dương thì $x,y,z>1$, do đó $xyz>1$. Trái giả thiết. Còn nếu hai trong ba số này dương thì tích: $(x-1)(y-1)(z-1)<0$; vô lý. Vậy chỉ có một và chỉ một trong ba số x, y, z lớn hơn 1.

2. Chứng minh rằng không tồn tại các số a, b, c đồng thời thỏa mãn (1), (2), (3):

$$|a| < |b-c| \quad (1)$$

$$|b| < |c-a| \quad (2)$$

$$|c| < |a-b| \quad (3)$$

* <u>Hướng dẫn</u>:

Bình phương hai vế của (1), (2), (3) sau đó chuyển vế và áp dụng hằng đẳng thức $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ cuối cùng nhân chúng lại với nhau ta được: $-\left[(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\right]^2 > 0 \Rightarrow$ vô lý, vậy bài toán đuọc chứng minh.

3. Cho $a,b,c > 0$ và $abc = 1$. Hãy chứng minh: $a+b+c \geq 3$

* <u>Hướng dẫn</u>:

Giả sử ngược lại: $a+b+c < 3\,(1)$, nhân thêm ab vào hai vế của (1) rồi biến đổi tương đương ta được: $ab^2 + \left(a^2 - 3a\right)b + 1 < 0$.

Đặt $f(x) = ab^2 + \left(a^2 - 3a\right)b + 1$ xét Δ của $f(x)$ ta có $\Delta \leq 0$

Vì $\begin{cases} abc > 0 \\ a+b+c < 3 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 3 \Rightarrow f(b) \geq 0 \Rightarrow$ vô lý $\Rightarrow$ đpcm.

4. Có tồn tại $x \in R$ sao cho: $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{\tan 3x}{\tan x} \leq 3$?

* <u>Hướng dẫn</u>:

Giả sử tồn tại $x \in R$ để: $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{\tan 3x}{\tan x} \leq 3$. Lúc đó:

$$\begin{cases} x \neq k\pi \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} (k \in Z) \\ \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{\tan 3x}{\tan x} \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{1 - 3\tan^2 x} \geq 0 \\ \dfrac{8\tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3\tan^2 x > 0 \\ 1 - 3\tan^2 x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{vô lý}$$

Vậy không tồn tại $x \in R$ thỏa mãn điều kiện đề bài cho.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

1. Cho ΔABC, tìm GTlN của $f = -2\cos C\cos(A-B) - \cos 2C$ (A, B, C là 3 góc của tam giác)

A. $\frac{2}{3}$ B. 0 C. 1 D. $\frac{3}{2}$

2. Tìm GTNN của $A = \sin^8 x + \cos^8 x$

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{16}$ C. 1 D đáp án khác

3. Tìm GTLN & GTNN của $y = \sin x(1 - 2\cos 2x)$ lần lượt là:

A. $\frac{1}{2}; \sqrt{2}$ B. 1; 2 C. 3 ; -3 D. đáp án khác

4. $\forall \Delta ABC$, GTLN của $f = \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$

A. 27 B. 12 C. $\frac{1}{12}$ D. đáp án khác

5. GTNN của $C = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$ với $0 < x < 1$

A. $2\sqrt{5}$ B. $5 + 2\sqrt{5}$ C. $5 - 2\sqrt{5}$ D. đáp ánkhác

6. a, b, c là 3 cạnh Δ, m_a, m_b, m_c là 3 đường trung tuyến của a, b, c. bất đẳng thức đúng:

A. $\frac{a+b+c}{2} \le m_a + m_b + m_c \le a+b+c$

B. $\frac{a+b+c}{2} < m_a + m_b + m_c < a+b+c$

C. $\frac{a+b+c}{2} \le m_a + m_b + m_c < a+b+c$

D. tất cả điều sai

7. Tứ giác ABCD, đường chéo AC, phát biểu nào đúng:

A. $AC < \frac{AB + BC + CD + DA}{2}$

B. $AC = \frac{AB + BC + CD + DA}{2}$

C. $AC \ge \frac{AB + BC + CD + DA}{2}$

D. đáp án khác

8. a, b, c là độ dài 3 cạnh Δ, phát biểu nào đúng:

A. $a^2+b^2+c^2>2(ab+bc+ca)$
B. $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$
C. $a^2+b^2+c^2\le 2(ab+bc+ca)$
D. $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)$

9. h_a, h_b là đường cao ΔABC, phát biểu nào đúng:

A. $S_{ABC}\ge \frac{1}{2}h_ah_b$

B. $S_{ABC}\le \frac{1}{2}h_ah_b$

C. $S_{ABC}< \frac{1}{2}h_ah_b$

D. $S_{ABC}> \frac{1}{2}h_ah_b$

10. h_a, h_b, h_c là 3 đường cao ΔABC, phát biểu nào đúng:

A. $S_{ABC}>\frac{1}{2}\sqrt[3]{(h_ah_bh_c)^2}$

B. $S_{ABC}<\frac{1}{2}\sqrt[3]{(h_ah_bh_c)^2}$

C. $S_{ABC}\le\frac{1}{2}\sqrt[3]{(h_ah_bh_c)^2}$

D. $S_{ABC}\ge\frac{1}{2}\sqrt[3]{(h_ah_bh_c)^2}$

11. Bất đẳng thức nào sau đây sai?

A. $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

B. $a^2+b^2+4\ge ab+2a+2b$

C. $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge\frac{ab}{2}+\frac{ac}{2}+bc$

D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{\frac{a^2}{b}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}}$

12: Cho $a,b\in R$, bất đẳng thức nào sai:

A. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$

B. $a^2+b^2\ge 2ab$

C. $a^4+b^4\ge ab^2+a^2b$ D. $a^2+b^2+1<ab+a+b$

13: Giá trị lớn nhất của $A=x\left(x^2-6\right)$ biết $0\le x\le 3$:

A. 5 B. 4

C. 9 D. 0

14: Giá trị nhỏ nhất của $y=5x^2+3x-14$ là:

A. $-\frac{289}{20}$ B. $-\frac{17}{2}$

C. $-\frac{15}{2}$ D. $-\frac{13}{2}$

15: Giá trị max của $y=\frac{3}{4x^2+4x+5}$ là:

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{3}{7}$

16: Giá trị nhỏ nhất của $y=\frac{x^2-6x+7}{x^2-6x+12}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{5}$

C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{5}$

17: Với $x>y>0, xy=1$. Giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{x^2+y^2}{x-y}$ là:

A. $2\sqrt{2}$ B. $-2\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

18: Nếu có $a>b>c>0$. Xét bất đẳng thức sau:

a. $\frac{a-c}{b-a}>\frac{b-c}{b-a}$ b. $ab>ac$ c. $\frac{b}{a}>\frac{b}{c}$

Phát biểu đúng:

A. Chỉ a B. Chỉ b C. a & b D. b & c

19: Cho $a^2<b^2, a,b\ne 0$, xét các bất đẳng thức sau:

a. $\frac{a^2}{b}>\frac{b^2}{a}$ b. $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2}$ c. $\left(a+b\right)\left(a-b\right)<0$

Phát biểu đúng:

A. Chỉ b đúng B. Chỉ a & b C. Chỉ b & c D. Chỉ a & b

20: Giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x - 2y + 2$ là:

A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

21: Giá trị lớn nhất của: $A = \dfrac{x\sqrt{2-2x^2}}{2-x^2}$ $(0 < x < 1)$ là:

A. Một số nguyên dương B. Một số nguyên âm

C. Một số hữu tỉ D. Một số vô tỉ

22: Tìm mệnh đề đúng:

A. $a < b \Rightarrow ac < bc$

B. $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

C. $a < b$ vaø $c < d \Rightarrow ac < bd$

D. Cả A, B, C đều sai

23: Tìm mệnh đề sai:

A. $|a+b| \le |a| + |b|, \forall a, b$

B. $|a-b| \ge |a| - |b|, \forall a, b$

C. $a^2 > 0, \forall a$

D. $-|a| \le a \le |a|, \forall a$

24: Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức:

a. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2$ b. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \ge 3$ c. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \ge \dfrac{9}{a+b+c}$

Bất đẳng thức đúng:

A. a B. b C. c D. Cả a, b, c

25: Cho $a > b > 0$ và $x = \dfrac{1+a}{1+a+a^2}$, $y = \dfrac{1+b}{1+b+b^2}$. Mệnh đề đúng:

A. $x < y$ B. $x > y$ C. $x = y$ D. Không xác định được

26: Cho $x, y > 0$. Tìm bất đẳng thức đúng:

A. $(x+y)^2 \ge 4xy$

B. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$

C. $\dfrac{1}{xy} \ge \dfrac{4}{(x+y)^2}$

D. Cả 3 đều đúng.

Hướng dẫn và đáp số:

1. Chọn D

$$f = -2\cos C\cos(A-B) - 2\cos^2 C + 1$$
$$= -2\left[\cos^2 c + \cos C\cos(A-B) + \frac{1}{4}\cos^2(A-B)\right] - \frac{1}{2}\left[1-\cos^2(A-B)\right] + \frac{3}{2}$$
$$= \frac{3}{2} - 2\left[\cos C + \frac{1}{2}\cos^2(A-B)\right]^2 - \frac{1}{2}\sin^2(A-B)$$
$$\le \frac{3}{2}$$

2. Chọn A

$$A = \left(\cos^4 x + \sin^4 x\right)^2 - 2\cos^4 x\sin^4 x$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x$$
$$= 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x$$
$$= \cos^2 2x + \frac{1}{8}(1-\cos^2 2x)^2$$
$$= \frac{3}{4}\cos^2 2x + \frac{1}{8}\cos^4 2x + \frac{1}{8}$$
$$\ge \frac{1}{8} \quad \forall x$$

3.Chọn C

Do

$\sin x \,\&\, (1-2\cos 2x)$ không đổi dấu nên

$$y = \sin x - 2\cos 2x\sin x$$
$$= 2\sin x - \sin 3x$$
$$\Rightarrow |y| \le 2|\sin x| + |\sin 3x| \quad do \quad |a+b| \le |a| + |b|$$
$$\Rightarrow |y| \le 3 \quad (do \quad |\sin x| \le 1)$$
$$\Rightarrow -3 \le y \le 3$$

4. Chọn D

$$f = \left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\right]^2 \sin\frac{C}{2}$$

$$do \quad \begin{cases} 1 > \sin\frac{C}{2} > 0 \\ \cos\frac{A-B}{2} \le 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \le \frac{1}{8}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(2-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\le \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$ (bất đẳng thức côsi cho 3 số dương)

5. Chọn B

$$C = \frac{x}{1-x} + \frac{5(1-x)}{x} + 5 \ge 2\sqrt{5} + 5$$

6. Chọn C

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{a+b-c}{2} \le m_c < \frac{a+b}{2} \\ \frac{b+c-a}{2} \le m_a < \frac{c+b}{2} \\ \frac{a+c-b}{2} \le m_b < \frac{a+c}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{2} \le m_a + m_b + m_c < a+b+c$$

7. Chọn A

$$\begin{cases} AC < AB + BC \\ AC < CD + DA \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC < \frac{AB + BC + CD + DA}{2}$$

8. Chọn B

$$a < b + c \Rightarrow a^2 < a(b+c) = ab + ac$$

$$b < a + c \Rightarrow b^2 < b(a+c) = ab + bc$$

$$c < a + a \Rightarrow c^2 < c(a+b) = bc + ac$$

9. Chọn A

$$\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{1}{2} a h_a \\ a \geq h_b \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \geq \frac{1}{2} h_a h_b$$

10. Chọn D

$$\begin{cases} a \geq h_b \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2} a h_a \geq \dfrac{1}{2} h_b h_a \\ b \geq h_c \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2} b h_b \geq \dfrac{1}{2} h_b h_c \\ c \geq h_a \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2} c h_c \geq \dfrac{1}{2} h_c h_a \end{cases}$$

$$\Rightarrow S^3_{ABC} \geq \frac{1}{8} (h_a h_b h_c)^2$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \geq \frac{1}{2} \sqrt[3]{(h_a h_b h_c)^2}$$

11 .Chọn D

Sử dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow$ A, B, C đúng.

12. Chọn D

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ta được: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

13. Chọn C:

$A = x\left(x^2 - 6\right) = x\left(x^2 - 9\right) + 3x$ lại có: $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow x\left(x^2 - 9\right) < 0,\ 3x \leq 9$ nên $A \leq 9$.

14. Chọn A:

$$y = 5x^2 + 3x - 14 = 5x^2 + 3x + \frac{9}{20} - \frac{289}{20}$$

$$= \left(\sqrt{5}x + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{289}{20} \geq -\frac{289}{20}$$

15: Chọn B:

$$y = \frac{3}{4x^2 - 4x + 5} = \frac{3}{\left(2x - 1\right)^2 + 4} \leq \frac{3}{4}$$

16: Chọn D:

$$y = \frac{x^2 - 6x + 7}{x^2 - 6x + 12} = \frac{-5}{x^2 - 6x + 9 + 3} + 1 = \frac{-5}{\left(x - 3\right)^2 + 3} + 1 \geq -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$$

17: Chọn A:

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{\left(x-y\right)^2+2xy}{x-y}=x-y+\frac{2xy}{x-y}\geq 2\sqrt{2xy}\geq 2\sqrt{2}$$

18: Chọn B:

a. Do $a>b>0\Rightarrow b-a<0\Rightarrow \frac{a-c}{b-a}>\frac{b-c}{b-a}\Leftrightarrow a-c<b-c\Leftrightarrow a<b$ (ta có gt)

b. Do $a<0$ nên $ab>ac\Leftrightarrow b>c$ (đúng gt)

c. Do $b<0$ nên $\frac{b}{a}>\frac{b}{c}\Leftrightarrow a<c$ (trái gt)

19: Chọn C:

a. $\frac{a^2}{a}>\frac{b^2}{a}$ đúng với $a>0$.

b. $a^2>b^2\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$ (đúng).

c. $\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2<0\Leftrightarrow a^2<b^2$ (đúng).

20: Chọn A:

$A=2x^2-4xy+5y^2-4x-2y+2$

$=\left(x-2y\right)^2+\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2-3\geq -3\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất là -3.

21: Chọn C:

$$A=\frac{x\sqrt{2-2x^2}}{2-x^2}\quad (0<x<1)$$

$$=\frac{\sqrt{x^2\left(2-2x^2\right)}}{2-x^2}\leq\frac{\frac{x^2+2-2x^2}{2}}{2-x^2}=\frac{1}{2}$$

22: Chọn D:

A. Đúng với $c>0$

B. Đúng với $a,b>0$

C. Đúng với $a,b,c,d>0$

23: Chọn C:

$a^2\geq 0,\forall a$

24: Chọn D:

Sử dụng bất đẳng thức côsi:

a. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=2$

b. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}=3$

c. Dùng bất đẳng thức B.C.S: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq (1+1+1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

25: Chọn A vì $x-y>0$

26: Chọn D:

A. $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (đúng).

B. Áp dụng bất đẳng thức B.C.S: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y) \geq (1+1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

C. $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$ (giống câu A)

Mục lục