Bài 2: ÔN TẬP VỀ HÀM HỮU TỶ

*(Nội dung ôn tập do trung tâm luyện thi chất lượng cao **Vĩnh Viễn** cung cấp)*

1) Phương trình tổng quát : $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + p}$ với $a.m \neq 0$.

Thực hiện phép chia đa thức ta có :

$$f(x) = \frac{a}{m}x + \frac{bm - ap}{m^2} + \frac{D}{mx + p} \quad (1)$$

Với $D = c - p\left(\dfrac{bm - ap}{m^2}\right)$

2) Đường tiệm cận :

* Nếu $D \neq 0$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng

$x = -\dfrac{p}{m}$ và tiệm cận xiên $y = \dfrac{a}{m}x + \dfrac{bm - ap}{m^2}$.

Giao điểm I của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

* Nếu $D = 0$, đồ thị suy biến thành đường thẳng

$y = \dfrac{a}{m}x + \dfrac{bm - ap}{m^2}$ trừ một điểm có hoành độ $x = -\dfrac{p}{m}$.

3) Đạo hàm cấp 1, 2 :

Khi gặp hàm hữu tỉ nên dùng công thức (1), ta có :

$$f'(x) = \frac{a}{m} - \frac{Dm}{(mx + p)^2} = \frac{\frac{a}{m}(mx + p)^2 - Dm}{(mx + p)^2}$$

$$f''(x) = \frac{Dm.2m}{(mx + p)^3}$$

4) Cực trị hàm số :

Nếu tam thức $g(x) = \dfrac{a}{m}(mx + p)^2 - Dm$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 và đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là :

$$M\left(x_1, 2\frac{a}{m}x_1 + \frac{b}{m}\right) \quad N\left(x_2, 2\frac{a}{m}x_2 + \frac{b}{m}\right)$$

i) Nếu $a.m > 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm thì hàm tăng (đồng biến) trên từng khỏang xác định.

ii) Nếu $a.m < 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm thì hàm giảm (nghịch biến) trên từng khỏang xác định.

iii) Nếu $a.m > 0$ và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì hàm đạt cực đại tại x_1 và đạt cực tiểu tại x_2 thỏa $x_1 < x_2$ và $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{p}{m}$.

iv) Nếu $a.m < 0$ và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì hàm đạt cực tiểu tại x_1 và đạt cực đại tại x_2 thỏa $x_1 < x_2$ và $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{p}{m}$.

5) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị :

Giả sử hàm có cực trị. Tọa độ hai điểm cực trị thỏa phương trình đường thẳng :

$$y = \frac{2a}{m}x + \frac{b}{m}$$

đó là phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.

6) Tính chất của tiếp tuyến :

Mọi tiếp tuyến với (C) tại M thuộc (C) cắt hai đường tiệm cận tại A và B thì :

* M là trung điểm AB.

* Tam giác IAB có diện tích không đổi.

7) Tính chất của đường tiệm cận :

* Mọi điểm M thuộc (C) có tích hai khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là một hằng số.

* Nếu từ một điểm E nằm trên một đường tiệm cận của (C) thì qua E chỉ có một tiếp tuyến duy nhất với (C).

8) Khi a = 0 và m $\neq$ 0 ta có hàm nhất biến $f(x) = \dfrac{bx+c}{mx+p}$

* Khi $m \neq 0$ và $bp - cm \neq 0$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -\dfrac{p}{m}$ và tiệm cận ngang là $y = \dfrac{b}{m}$.

Giao điểm I của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

* Nếu $bp - cm = 0$, đồ thị suy biến thành đường thẳng

$y = \dfrac{b}{m}$ trừ một điểm có hoành độ $x = -\dfrac{p}{m}$.

Đạo hàm cấp 1 khi a = 0:

$$f'(x) = \frac{bp - cm}{(mx+p)^2}$$

Đạo hàm có dấu của (bp – cm) với mọi x $\neq -\dfrac{p}{m}$. Do đó hàm luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trong từng khoảng xác định; nên được gọi là hàm nhất biến.

ĐỀ TOÁN ÔN TỔNG HỢP HÀM HỮU TỈ

Cho hàm số $y = \dfrac{(m+1)x^2 - 2mx - (m^3 - m^2 - 2)}{x - m}$ có đồ thị (C_m).

I. Trong phần này khảo sát các tính chất hàm số khi m = -1.

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C_{-1}). Chứng minh (C_{-1}) có tâm đối xứng.
2) Gọi (D_P) là đường thẳng có phương trình y = 2x + p. Chứng minh (D_P) luôn luôn cắt (C_{-1}) tại hai điểm A, B. Định p để đoạn AB ngắn nhất.
3) Tìm hai điểm M, N thuộc hai nhánh của (C_{-1}) để khoảng cách MN ngắn nhất.
4) Tìm M $\in$ (C_{-1}) để IM ngắn nhất. Trong trường hợp này chứng tỏ tiếp tuyến với (C_{-1}) tại M sẽ vuông góc với IM.
5) Gọi (D) là đường thẳng có phương trình y = ax + b với $a \neq$ **0** .Tìm điều kiện của b để tồn tại a sao cho (D) tiếp xúc với (C_{-1}).

II. Trong phần này ta xét tính chất hàm số khi m $\neq$ -1.

6) Tìm đường tiệm cận xiên của (C_m). Chứng minh tiệm cận xiên này tiếp xúc với một parabol cố định
$y = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{4}$.
7) Định m để tâm đối xứng của (C_m) nằm trên parabol
$y = x^2 + 1$.

III. Khảo sát tính chất của hàm số khi m = 1.

8) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.

9) Biện luận theo k số tiếp tuyến vẽ từ K (0, k) đến (C).
10) Tìm trên Ox các điểm từ đó ta vẽ được một tiếp tuyến duy nhất đến (C).
11) Gọi Δ là một tiếp tuyến với (C) tại J thuộc (C), Δ cắt 2 đường tiệm cận tại E và F. Chứng minh J là trung điểm của EF và tam giác IEF có diện tích không đổi (I là tâm đối xứng).
12) Chứng minh tích số hai khoảng cách từ $J \in$ (C) đến hai đường tiệm cận của (C) là một hằng số.

BÀI GIẢI

Phần I: m = -1 hàm số thành

$$y = \frac{2x+4}{x+1} = 2 + \frac{2}{x+1}$$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C_{-1}) : độc giả tự làm

Chứng minh (C_{-1}) có tâm đối xứng.

Đặt $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+2 \end{cases}$

hàm số thành $Y = \frac{2}{X}$, đây là 1 hàm lẻ. Vậy hàm số nhận điểm

I(-1,2) làm tâm đối xứng.

Cách khác: đồ thị nhận giao điểm I(-1,2) của 2 tiệm cận làm tâm đối xứng.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của

(D_p) và (C_{-1}) là :

$$\frac{2x+4}{x+1} = 2x + p$$

$\Leftrightarrow$ 2x + 4 = (2x + p) (x + 1)

(hiển nhiên pt này không có nghiệm x = -1)

$\Leftrightarrow$ $2x^2 + px + p - 4 = 0$ (1)

pt (1) có $\Delta = p^2 - 8(p - 4)$

$= (p - 4)^2 + 16$

$\Rightarrow$ $\Delta > 0, \forall p \Rightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $\forall p$

$\Rightarrow$ (D_p) luôn cắt (C_{-1}) tại 2 điểm phân biệt

A $(x_1 , 2x_1 + p)$, B $(x_2 , 2x_2 + p)$

Với x_1, x_2 là 2 nghiệm của (1).

Ta có: $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (2x_2 - 2x_1)^2$

$= 5(x_2 - x_1)^2 = 5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2$

mà $x_1 + x_2 = -\frac{p}{2}$, $x_1.x_2 = \frac{p-4}{2}$

nên $AB^2 = 5.\frac{p^2}{4} - 10(p-4)$

$= \frac{5}{4}p^2 - 10p + 40$

Do đó, AB ngắn nhất khi $p = \frac{-b}{2a} = 4$

<u>Cách khác:</u>

Ta có $|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$\Rightarrow \quad (x_2 - x_1)^2 = \frac{\Delta}{a^2} = \frac{(p-4)^2 + 16}{4}$

Do đó, AB đạt min $\Leftrightarrow$ AB^2 đạt min

$\Leftrightarrow$ $5(x_2 - x_1)^2$ đạt min

$\Leftrightarrow$ $(x_2 - x_1)^2$ đạt min

$\Leftrightarrow$ $(p - 4)^2 + 16$ đạt min $\quad \Leftrightarrow$ $p = 4$

3) Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên 2 nhánh khác nhau của (C_{-1})

Giả sử $x_M < -1 < x_N$

Đặt $X = x + 1$ và $Y = y - 2$

I $(-1,2)$, hàm thành $Y = \frac{2}{X}$

Trong hệ trục XIY ta có :

$X_M < 0 < X_N$

Và $MN^2 = (X_N - X_M)^2 + \left(\frac{2}{X_N} - \frac{2}{X_M}\right)^2$

$= (X_N - X_M)^2 \left[1 + \frac{4}{X_N{}^2 X_M{}^2}\right]$

Vì $-X_M > 0$

Nên theo bất đẳng thức Cauchy ta có :

$(X_N - X_M)^2 = [X_N + (-X_M)]^2 \geq 4X_N(-X_M)$

và dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $X_N = -X_M$

$\Rightarrow \quad MN^2 \geq -4X_N X_M + \frac{16}{X_N(-X_M)}$

$\geq 2(8) \qquad$ (Cauchy)

Vậy MN đạt min $\Leftrightarrow$ $MN^2 = 16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_N = -X_M > 0 \\ 4X_N X_M = \dfrac{16}{X_N.X_M} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X_N = \sqrt{2} \\ X_M = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy trong hệ trục X I Y ta có MN ngắn nhất khi $M(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $N(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Do đó, trong hệ trục xOy ta có MN ngắn nhất khi

$M(-1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$, $N(-1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$

(***nhớ:*** $x = X - 1$, $y = Y + 2$).

Cách khác: Ta có

$x_M < -1 < x_N$. Đặt $\alpha = 1 + x_M$ và $\beta = 1 + x_N$ thì $\alpha < 0 < \beta$

Ta có $M\left(\alpha - 1, 2 + \dfrac{2}{\alpha}\right)$, $N\left(\beta - 1, 2 + \dfrac{2}{\beta}\right)$

$$MN^2 = (\beta - \alpha)^2 + \left(\frac{2}{\beta} - \frac{2}{\alpha}\right)^2$$

$$= (\beta - \alpha)^2 \left[1 + \frac{4}{\alpha^2\beta^2}\right]$$

$$MN^2 = \left[(\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta\right]\left[1 + \frac{4}{\alpha^2\beta^2}\right]$$

$$\geq -4\alpha\beta\left[1 + \frac{4}{\alpha^2\beta^2}\right]$$

$$\geq -4\alpha\beta\left(\frac{4}{|\alpha\beta|}\right) = 16 \quad \text{(Cauchy)}$$

Do đó MN đạt min

$\Leftrightarrow \beta = -\alpha$ và $\alpha^2\beta^2 = 4$

$\Rightarrow \alpha = -\sqrt{2}$ và $\beta = \sqrt{2}$

Vậy MN nhỏ nhất khi

$M\left(-\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2}\right)$ và $N\left(\sqrt{2} - 1, 2 + \sqrt{2}\right)$

4) Gọi $M\left(x_0, 2 + \dfrac{2}{x_0 + 1}\right)$. Ta có I(–1, 2) nên

$$IM^2 = (x_0 + 1)^2 + \frac{4}{(x_0 + 1)^2} \geq 4 \quad \text{(Cauchy)}$$

Do đó IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow |x_0 + 1| = \dfrac{2}{|x_0 + 1|}$

$\Leftrightarrow \ (x_0+1)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow x_0 = -1 \pm \sqrt{2}$

Vậy có 2 điểm M với toạ độ là $\left(-1-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}\right)$, $\left(-1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{IM} = \left(x_0+1\ ;\ \dfrac{2}{x_0+1}\right)$

$\Rightarrow$ IM có hệ số góc là $\dfrac{2}{(x_0+1)^2} = 1 = k_1$ (do $(x_0+1)^2 = 2$)

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là

$k_2 = y'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0+1)^2} = -1$ (do $(x_0+1)^2 = 2$)

$\Rightarrow$ $k_1 . k_2 = -1$. Vậy tiếp tuyến tại M vuông góc với IM.

5) (D) tiếp xúc (C_{-1}) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{2x+4}{x+1} = ax+b & (1) \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} = a & (2) \end{cases}$$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2x+4}{(x+1)} = \dfrac{-2x}{(x+1)^2} + b$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \quad (2x + 4)(x + 1) = -2x + b(x+1)^2$ có nghiệm

(hiển nhiên pt này không có nghiệm $x = -1$)

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + 2(x + 1)$

$= -2(x + 1) + 2 + b(x+1)^2$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (b - 2)u^2 - 4u + 2 = 0$ có nghiệm

(Với $u = x + 1$)

$\Leftrightarrow \quad \Delta' = 4 - 2(b - 2) \geq 0$

(vì $B = -4 \neq 0$ nên pt bậc 2 có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 4 - 2(b - 2) \geq 0$)

$\Leftrightarrow \quad b - 2 \leq 2 \quad \Leftrightarrow b \leq 4$

Vậy với $b \leq 4$ tồn tại $a \neq 0$ (phụ thuộc vào b) để (D) tiếp xúc với (C_{-1})

NHẬN XÉT: PT (1) phụ thuộc vào b nên a phụ thuộc vào b.

II. Phần này cho m thay đổi và $m \neq -1$

6) $y = (m + 1)x + m^2 - m + \dfrac{2}{x-m}$

Vậy đồ thị (C_m) luôn luôn có tiệm cận xiên Δ_m có phương trình :

$y = (m + 1)x + m^2 - m$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ_m và (P) là

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = (m + 1)x + m^2 - m$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2(2m - 1)x + 4m^2 - 4m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+2m-1)^2 = 0$

Vậy Δ_m tiếp xúc (P), $\forall m$.

<u>Cách khác</u>: Δ_m tiếp xúc (P), $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = (m+1)x + m^2 - m \\ \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2} = m+1 \end{cases} \text{ có nghiệm, } \forall m .$$

7) (C_m) có tâm đối xứng là $(m,\ 2m^2)$. Để tâm đối xứng nằm trên parabol $y = x^2 + 1$ thì m thoả : $2m^2 = m^2 + 1 \ \Leftrightarrow\ m^2 = 1$

Vì $m \neq -1$ nên giá trị m cần tìm là $m = 1$

III. <u>Khảo sát tính chất của hàm số khi m = 1</u>

8) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi m = 1 (độc giả tự làm).

9) Phương trình tiếp tuyến vẽ từ K (0, k) đến (C) có dạng:

$y = hx + k$ (D)

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} \frac{2x^2 - 2x + 2}{x-1} = hx + k \\ 2 - \frac{2}{(x-1)^2} = h \end{cases}$ có nghiệm

$\Rightarrow$ Phương trình hoành độ tiếp điểm của (D) và (C) là:

$$\frac{2x^2 - 2x + 2}{x-1} = \left[2 - \frac{2}{(x-1)^2}\right]x + h$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x-1} = -\frac{2x}{(x-1)^2} + h$

$\Leftrightarrow \quad 2(x - 1) = -2x + h(x-1)^2$

(hiển nhiên x = 1 không là nghiệm)

$\Leftrightarrow \quad h(x-1)^2 - 2(x - 1) - 2(x - 1) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad h(x-1)^2 - 4(x - 1) - 2 = 0 \qquad (9a)$

Đặt $u = x - 1$, phương trình thành

$hu^2 - 4u - 2 = 0$ (9b)

+ $h \neq 0 \Rightarrow$ (9b) có $\Delta' = 4 + 2h$

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow h > -2$

Biện luận :

i) $h = 0 \Rightarrow$ (9b) có 1 nghiệm

$\Rightarrow$ (9a) có 1 nghiệm

$\Rightarrow$ có 1 tiếp tuyến qua K.

ii) $h = -2 \Rightarrow$ có 1 tiếp tuyến qua K.

iii) $h < -2 \Rightarrow$ không có tiếp tuyến nào qua K.

iv) Nếu $h > -2$ và $h \neq 0 \Rightarrow$ có 2 tiếp tuyến qua K.

Ghi chú: Đối với hàm bậc 3 hay hàm hữu tỉ ta có: " có bao nhiêu tiếp điểm thì có bấy nhiêu tiếp tuyến".

10) Phương trình tiếp tuyến với (C) qua $E(x_0,0) \in Ox$

có dạng : $y = h(x - x_0)$ (D_0)

$\Rightarrow$ Phương trình hoành độ tiếp điểm của (D_0) và (C) là :

$$2x + \frac{2}{x-1} = \left[2 - \frac{2}{(x-1)^2}\right](x - x_0) \quad (10a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x-1} = \frac{-x}{(x-1)^2} - x_0 + \frac{x_0}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0(x-1)^2 + (x-1) + x - x_0 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 - x_0 = 0 \quad (10b) \\ x \neq 1 \end{cases}$$

i) Nếu $x_0 = 0$

$\Rightarrow$ (10b) có đúng 1 nghiệm $x \neq 1 \Rightarrow$ (10a) có đúng 1 nghiệm .

ii) Nếu $x_0 = 1$

$\Rightarrow$ (10b) có nghiệm $x = 1 \vee x = -1$

$\Rightarrow$ (10a) có đúng 1 nghiệm $x = -1$

iii) Nếu $x_0 \neq 0$ và $x_0 \neq 1$. Đặt $u = x - 1$

(10b) thành $x_0u^2 + 2u + 1 - x_0 = 0$

có $\Delta' = 1 - x_0(1 - x_0) = x_0^2 - x_0 + 1 > 0, \forall x_0\ (\neq 0$ và $\neq 1) \Rightarrow$ (10b) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1 \Rightarrow$ (10a) có 2 nghiệm phân biệt.

Tóm lại có 2 điểm E thoả mãn yêu cầu bài toán là (0, 0) và (1, 0)

11) Tâm đối xứng I (1,2).

$J \in (C) \Rightarrow \quad J\left(x_0,\ 2x_0 + \frac{2}{x_0 - 1}\right)$

Tiếp tuyến Δ tại J với (C) có phương trình :

$$y = \left[2 - \frac{2}{(x_0-1)^2}\right](x - x_0) + 2x_0 + \frac{2}{x_0 - 1}$$

hay $\quad y = \left(2 - \frac{2}{(x_0-1)^2}\right)x + \frac{2x_0}{(x_0-1)^2} + \frac{2}{x_0-1}$

Δ cắt đường tiệm cận đứng tại

$E\left(1,\ 2 + \frac{4}{x_0 - 1}\right)$ và cắt đường tiện cận xiên tại $F(2x_0 - 1, 4x_0 - 2)$

$\Rightarrow \quad x_E + x_F = 2x_0 = 2x_J$

và $\quad y_E + y_F = 4x_0 + \frac{4}{x_0 - 1} = 2y_J$

$\Rightarrow$ J là trung điểm của EF.

Gọi H là hình chiếu của F lên IE, ta có diện tích tam giác IEF là :

$$S = \frac{1}{2}\ FH\ .\ IE$$

Mà $FH = |x_F - x_H| = |x_F - x_J| = 2|x_0 - 1|$

Và $IE = |y_E - y_I| = \frac{4}{|x_0 - 1|}$

Nên $\quad S = \frac{1}{2}\ .\ 2|x_0 - 1|\ .\ \frac{4}{|x_0 - 1|} = 4$

Cách khác:

Ta có góc của 2 tiệm cận của (C) là không đổi nên sinEIF là không đổi. Do đó

$S = \frac{1}{2}$ IE . IF sin EIF Không đổi

$\Leftrightarrow$ IE . IF không đổi

Mà $IE = \frac{2}{|x_0 - 1|}$ Và $IF = \sqrt{20}\,|x_0 - 1|$

$\Rightarrow$ IE . IF không đổi $\Rightarrow$ S không đổi.

12) Gọi P, Q là hình chiếu của $J \in (C)$ xuống 2 đường tiệm cận đứng và xiên, ta có :

JP = $|x_0 - 1|$, JQ = d (J, tcx) = $\dfrac{2}{\sqrt{5}|x_0-1|}$

$$\left(d(J, tcx) = \frac{\left|2x_0 - 2x_0 - \dfrac{2}{x_0 - 1}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}|x_0 - 1|} \right)$$

$\Rightarrow$ JP . JQ = $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ không đổi.

Cách khác:

Ta có: $\dfrac{1}{2}$ JP . IE = $\dfrac{1}{2}$ JQ . IF = $\dfrac{S}{2}$ không đổi

$\Rightarrow$ JP . IE . JQ . IF = S^2 không đổi

mà IE . IF không đổi

nên JP . JQ không đổi.

CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC (DỰ TRỮ)
VỀ HÀM HỮU TỈ TỪ NĂM 2002 ĐẾN NĂM 2005

I) ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG - KHỐI A - DỰ BỊ 2 - NĂM 2002

Cho hàm số: $y = \dfrac{x^2 - 2x + m}{x - 2}$ (1) (m là tham số)

1. Xác định m để hàm số (1) nghịch biến trên đoạn [–1; 0]
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 1.
3. Tìm a để phương trình sau có nghiệm :

$$9^{1+\sqrt{1-t^2}} - (a+2)3^{1+\sqrt{1-t^2}} + 2a + 1 = 0$$

Giải

1) Ta có : $y = \dfrac{x^2 - 2x + m}{x - 2}$ $\qquad y' = \dfrac{x^2 - 4x + 4 - m}{(x-2)^2}$

Hàm số nghịch biến trên đoạn [–1; 0]

$\Leftrightarrow$ $y' \le 0 \ \forall x \in [-1; 0]$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 4 - m \le 0 \ \forall x \in [-1; 0]$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 4 \le m \quad \forall x \in [-1; 0]$

$\Leftrightarrow \max\limits_{-1\le x\le 0}(x^2 - 4x + 4) \le m \Leftrightarrow 9 \le m$ (vì hàm $x^2 - 4x + 4$ giảm trên $[-1; 0]$ nên đạt max tại x = –1)

Cách khác

Khảo sát $f(x) = x^2 - 4x + 4$ với $-1 \le x \le 0$

$f'(x) = 2x - 4, \qquad -1 \le x \le 0$

x		-1		0		2		$+\infty$
f'	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
f		9	$\searrow$	4				

Nhờ bảng biến thiên ta chọn $m \geq 9$.

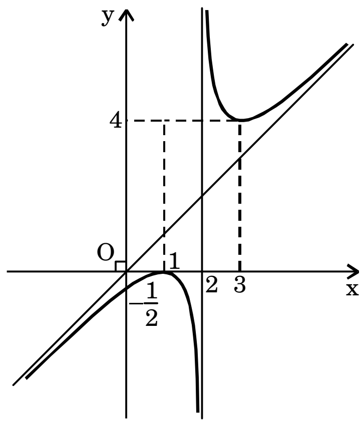
2) Khi m = 1 ta có : $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

MXĐ : $D = R\backslash\{2\}$.

y' = $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$ **;** $y' = 0 \Leftrightarrow \quad x = 1$ hay $x = 3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	4	$\nearrow$	∞

Tiệm cận :x = 2 là tiệm cận đứng y = x là tiệm cận xiên.



3)

$$9^{1+\sqrt{1-t^2}} - (a+2)3^{1+\sqrt{1-t^2}} + 2a + 1 = 0\,(1)$$

ĐK :$1 - t^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1 \qquad \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \sqrt{1-t^2} \leq 2$

$\Leftrightarrow 3^1 \leq 3^{1+\sqrt{1-t^2}} \leq 3^2$ Đặt $u = 3^{1+\sqrt{1-t^2}}$, $3 \leq u \leq 9$

(1) thành $\quad u^2 - (a+2)u + 2a + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad u^2 - 2u + 1 = a(u-2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{u^2 - 2u + 1}{u - 2} = a\,(2)$

Khảo sát hàm f(u) **=** $\dfrac{u^2 - 2u + 1}{u - 2}$ với $\quad 3 \leq u \leq 9$

$f'(u) = \dfrac{u^2 - 4u + 3}{(u-2)^2}$, $\qquad f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1$ hay $u = 3$.

Vì $u^2 - 4u + 3 \geq 0, \forall u \geq 3$ nên $f'(u) \geq 0, \forall u \in [3;9]$.Do đó,

phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow f(3) \leq a \leq f(9) \Leftrightarrow 4 \leq a \leq \dfrac{64}{7}$.

<u>Cách khác</u>: ***dựa vào đồ thị câu 1 ta có phương trình (1) có nghiệm***

$\Leftrightarrow$ ***phương trình (2) có nghiệm*** $u \in [3;9]$

$\Leftrightarrow$ ***f(3) ≤ a ≤ f(9) ⇔ 4 ≤ a ≤*** $\dfrac{64}{7}$

II) ĐỀ DỰ BỊ 1 – KHỐI D - NĂM 2002

(3,0 điểm) Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + mx}{1 - x}$ (1) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0.
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu. Với giá trị nào của m thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) bằng 10?

1) m = 0 $\qquad y = \dfrac{x^2}{1-x}$ MXĐ : $D = R\backslash\{1\}$

$y' = \dfrac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2}$; $\qquad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$

Bảng biến thiên : y(0) = 0; y(2) = -4

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗	∞ ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$

Tiệm cận : $x = 1$ là tiệm cận đứng

$y = -x - 1$ là tiệm cận xiên.

Đồ thị:độc giả tự vẽ

2.a) Tìm m để hàm số (1) có CĐ, CT.

y có CĐ, CT $\quad\Leftrightarrow\quad$ y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt

Ta có $\qquad y' = \dfrac{-x^2 + 2x + m}{(1-x)^2}$

ycbt $\quad \Leftrightarrow \Delta' = 1 + m > 0 \Leftrightarrow \quad m > -1$.

Nhận xét :Đối với hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất, nếu tử số của đạo hàm có 2 nghiêm phân biệt thì chắc chắn 2 nghiệm đó khác với hoành độ của tiệm cận đứng.

b) Tìm m để khoảng cách giữa 2 cực trị bằng 10.

Giả sử hàm số có cực trị (m > - 1) thì phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị là:

$y = \dfrac{2x + m}{-1} = -2x - m$ với $m > -1$

$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + m = 0$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của y' = 0.

$M(x_1; -2x_1 - m); N(x_2; -2x_2 - m)$

$MN = 10 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{5(x_2 - x_1)^2}$

$100 = 5[x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2]$

$100 = 5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]$, $S = x_1x_2 = 2$, $P = -m$

$20 = 4 + 4m \quad m = 4$ thỏa điều kiện $m > -1$.

Cách khác:

Ta có $|x_2 - x_1| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 = \dfrac{\Delta}{a^2}$ ***= 4 - 4m,do đó***

$MN = 10 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{5(x_2 - x_1)^2}$

$\Leftrightarrow 100 = 5(4 - 4m) \Leftrightarrow m = 4$

III) ĐỀ DỰ BỊ 1 - KHỐI A – NĂM 2003

(2 điểm)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$y = \dfrac{2x^2 - 4x - 3}{2(x-1)}$

2. Tìm m để phương trình $2x^2 - 4x - 3 + 2m|x - 1| = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

BÀI GIẢI:

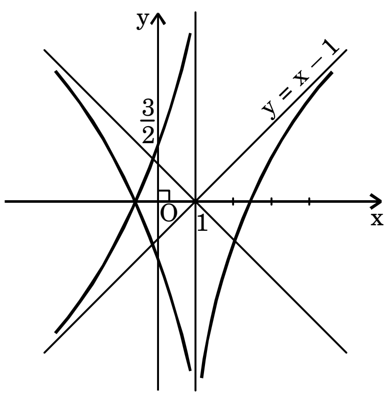
1) Khảo sát $\quad y = \dfrac{2x^2 - 4x - 3}{2(x-1)}$

- MXĐ : $D = R\backslash\{1\}$
- $y' = \dfrac{2x^2 - 4x + 7}{2(x-1)^2} > 0$ vì có $\Delta < 0$
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	||	+
y	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

- Tiệm cận : tiệm cận đứng $x = 1$

  tiệm cận xiên $y = x - 1$.



2) Phương trình $2x^2 - 4x - 3 + 2m|x - 1| = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 3}{2|x - 1|} = m$

Đồ thị g(x) có được bằng cách :

* lấy trùng với (C) khi x > 1
* lấy đối xứng qua Ox của (C) khi x < 1.

Vẽ đường thẳng y = m, ta thấy nó luôn luôn cắt đồ thị

$g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 3}{2|x-1|}$ tại 2 điểm phân biệt $\forall$m.

IV) KHỐI A – DỰ BỊ 2 – NĂM 2003

(2 điểm)

Cho hàm số: $y = \dfrac{x^2 + (2m+1)x + m^2 + m + 4}{2(x+m)}$ (1) (m là tham số)

1. Tìm m để hàm số (1) có cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0.

BÀI GIẢI:

1) Tìm m :

Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 4}{2(x+m)^2}$

y có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $\Delta' = m^2 - m^2 + 4 = 4 > 0$ (đúng $\forall$m)

Vậy hàm số luôn có 2 cực trị với mọi m.

Gọi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ là 2 điểm cực trị.

Ta có $y_{CT} = \dfrac{u'}{v'}, y_1 = \dfrac{2x_1 + 2m + 1}{2}$,

$y_2 = \dfrac{2x_2 + 2m + 1}{2}$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2}$

$= \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]}$

Ta có $S = x_1 + x_2 = -2m$, $P = x_1x_2 = m^2 - 4$

$AB = \sqrt{2[(-2m)^2 - 4m^2 + 16]} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ đvđd.

Cách khác: $AB = |x_2 - x_1|\sqrt{2} = \sqrt{2\Delta} = \sqrt{8\Delta'} = 4\sqrt{2}$.

2) Khi m = 0 $y = \dfrac{x^2 + x + 4}{2x}$

MXĐ : D = R\{0}

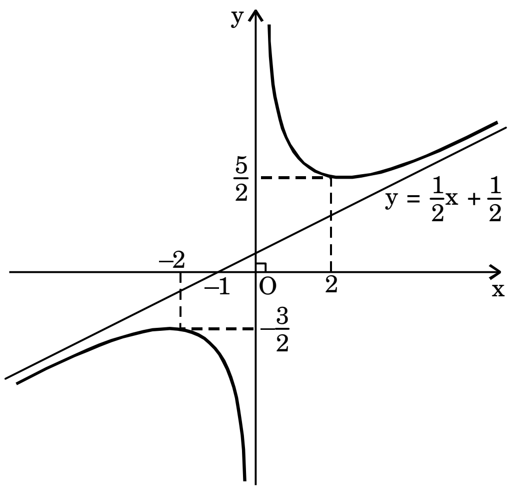
$y' = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$

y'	+	0	−	‖	−	0	+
y	$-\infty$ ↗	$\frac{3}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{5}{2}$	↗ $+\infty$

Tiệm cận : x = 0 là tiệm cận đứng

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên.



V) ĐỀ DỰ BỊ 2 - KHỐI B – NĂM 2003

(2 điểm) Cho hàm số : $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

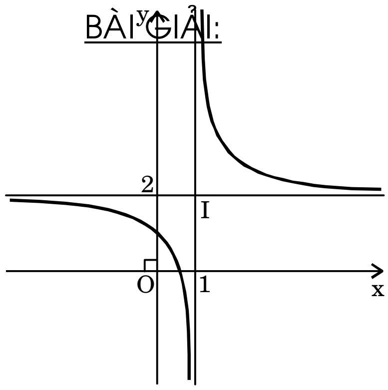
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

BÀI GIẢI:

1) Khảo sát $y = \dfrac{2x-1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$

MXĐ : D = R\{1}

$y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x \in R\backslash\{1\}$



x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

Tiệm cận : x = 1 là phương trình tiệm cận đứng

y = 2 là phương trình tiệm cận ngang.I(1; 2) là TĐX

2) Gọi $M(x_0; y_0) \in C$ là tiếp điểm.

Hệ số góc tiếp tuyến tại M là $f'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0-1)^2}$

Hệ số góc của đường thẳng IM là $\dfrac{y_0 - y_I}{x_0 - x_I} = \dfrac{1}{(x_0-1)^2} = k$

Vì Tiếp tuyến tại $M \perp IM \Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} \cdot \dfrac{1}{(x_0-1)^2} = -1$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^4 = 1 \Leftrightarrow x_0 - 1 = \pm 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y_0(0) = 1 \\ y_0(2) = 3 \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm $M_1(0; 1)$, $M_2(2; 3)$ thỏa ycbt.

VI) ĐỀ DỰ BỊ 1 – KHỐI D – NĂM 2003

(2 điểm)

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 5x + m^2 + 6}{x+3}$ (1) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.
2. Tìm m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

1) Khi m = 1 $\qquad y = \dfrac{x^2 + 5x + 7}{x+3}$

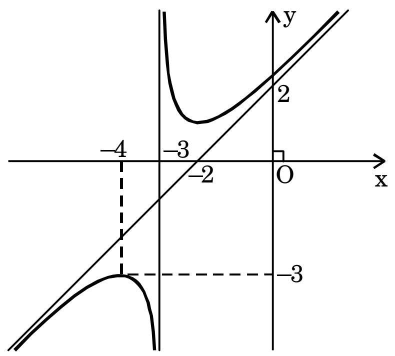
MXĐ : $D = R\backslash\{-3\}; y' = \dfrac{x^2 + 6x + 8}{(x+3)^2}$;

$y' = 0 \quad x = -4$ hay $x = -2$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-4		-3		-2		$+\infty$
y'		+	0	–	||	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

Tiệm cận : $x = -3$; $\qquad y = x + 2$.



2) Tìm m để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Ta có : $y' = \dfrac{x^2 + 6x + 9 - m^2}{(x+3)^2}$

y đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow\ y' \ge 0\ \ \forall x \ge 1$

$\Leftrightarrow\quad x^2 + 6x + 9 - m^2 \ge 0\ \forall x \ge 1$

$\Leftrightarrow\quad x^2 + 6x + 9 \ge m^2\quad \forall x \ge 1$

Khảo sát hàm số $\quad g(x) = x^2 + 6x + 9$, với $x \ge 1$

$g'(x) = 2x + 6 > 0,\ \forall x \ge 1$.Do đó

ycbt $\Leftrightarrow \min\limits_{x \ge 1}(x^2 + 6x + 9) \ge m^2 \Leftrightarrow g(1) = 16 \ge m^2$

$\Leftrightarrow -4 \le m \le 4.$

V I) ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG - KHỐI A - DỰ BỊ 2 - NĂM 2004

(2 điểm) Cho hàm số : $y = x + \dfrac{1}{x}$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát hàm số (1)
2. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) đi qua điểm M(-1; 7).

1) Khảo sát $y = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x}$ (C)

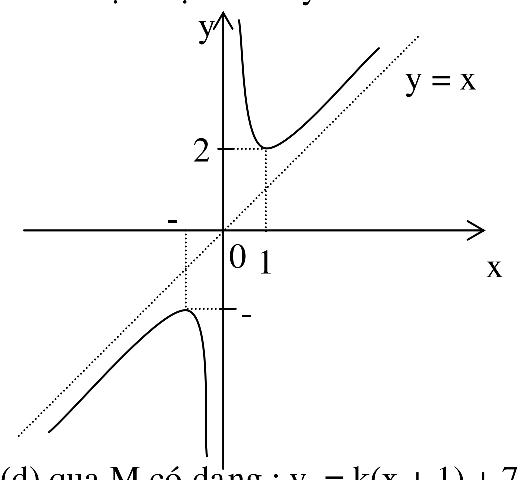
MXĐ : $D = R\setminus\ 0$

$y' = \dfrac{x^2-1}{x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

- BBT

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
		+	0	-	||	-	0	+	
	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

Tiệm cận đứng x = 0. Tiệm cận xiên y = x.



2) Pt tiếp tuyến (d) qua M có dạng : $y = k(x + 1) + 7$

(d) tiếp xúc (C)$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = k(x+1) + 7 & (1) \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thế (2) vào (1), ta có pthđ tiếp điểm của (d) và (C) là

$x + \dfrac{1}{x} = (1 - \dfrac{1}{x^2})(x+1) + 7 \ \Leftrightarrow\ x + \dfrac{1}{x} = x + 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + 7$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{x^2} + 2.\dfrac{1}{x} - 8 = 0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{x} = -4$ hay $\dfrac{1}{x} = 2$

(Nhận xét: đặt u = 1/x ta có $u^2 + 2u - 8 = 0$
$\Leftrightarrow$ u = -4 hay u =2)
Thế vào (2) ta có k = - 15 hay k = - 3.
Vậy pttt của (C) qua M là
$y = -15(x + 1) + 7$ hay $y = -3(x + 1) + 7$

V II) ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG - KHỐI D - DỰ BỊ 1 - NĂM 2004

(2 điểm)Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát hàm số (1)
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng x – 3y + 3 = 0

BÀI GIẢI:

1/ Khảo sát khi $y = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

- MXĐ : $D = R \setminus \{-1\}$
- $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$,

  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$
  $\Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -3$.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

- Tiệm cận :
  - Tiệm cận đứng x = – 1
  - Tiệm cận xiên y = x
- Đồ thị :độc giả tự vẽ.

2) Đường thẳng x – 3y + 3 = 0 có hệ số góc là 1/ 3 nên phương trình tiếp tuyến có dạng: y = –3x + m (d)

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{4}{x+1} = -3x + m \\ 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2} = -3 \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{4}{x+1} = -3x + m \\ x = -2 \text{ hay } x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ m = -12 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 0 \\ m = 4 \end{cases}$

Vậy $y = -3x - 12$ hay $y = -3x + 4$.

VIII) DỰ BỊ 1 KHỐI A năm 2005:

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 1 - 3m^2}{x - m}$ (*) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) ứng với m = 1.
2. Tìm m để hàm số (*) có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung.

Giải:

1/

(1)

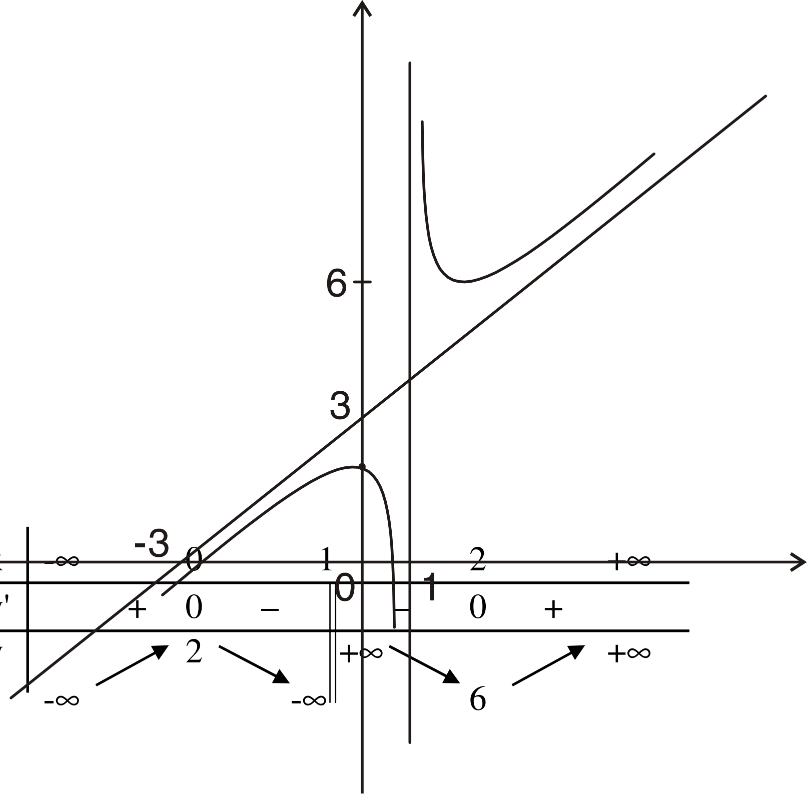
Khi m = 1 thì $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$

- MXĐ: D = R \ {1}
- $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $y' = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	6	↗	$+\infty$



- Tiệm cận :

$x = 1$ là pt t/c đứng

y = x + 3 là pt t/c xiên

2/

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}$

Hàm số (*) có 2 cực trị nằm về 2 phía trục tung

$\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P = m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |m| < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

IX) DỰ BỊ 2 KHỐI A năm 2005:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.
2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M (- 1; 0) và tiếp xúc với đồ thị (C) .

Giải:

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}(C)$

- MXĐ: $D = R \setminus \{-1\}$

$y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = -2$

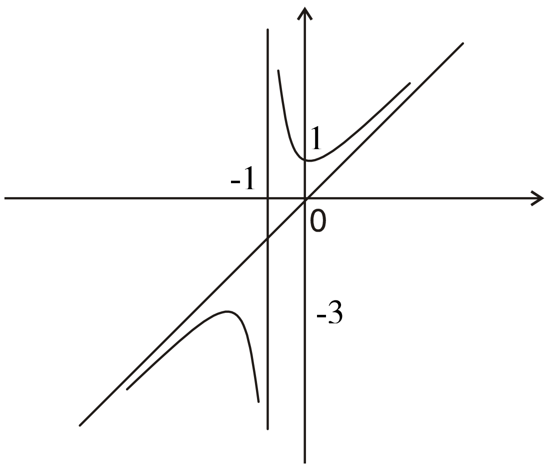
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

- Tiệm cận :

$x = -1$ là phương trình tiệm cận đứng

$y = x$ là phương trình tiệm cận xiên



2/ Phương trình tiếp tuyến Δ qua $M(-1,0)$ (hệ số góc k) có dạng

$\Delta: \ y = k(x+1)$

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ hệ pt sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = k(x+1) \\ \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = k \end{cases}$$

phương trình hoành độ tiếp điểm là $\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \dfrac{(x^2 + 2x)(x+1)}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \qquad k = \dfrac{3}{4}$

Vậy pt tiếp tuyến Δ với (C) qua $M(-1,0)$ là: $y = \dfrac{3}{4}(x+1)$

X) DỰ BỊ 2 KHỐI B năm 2005:

Cho *hàm số* : $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ (*)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (*) .
2. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C).Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua điểm I .

<u>Giải :</u>

1/ Khảo sát $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ (C)

- MXĐ: $D=R\setminus\{-1\}$

$y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}, y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ hay } x=-2$

• Bảng biến thiên :

x	-∞		-2		-1		0		+∞
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	-∞	↗	-2	↘ -∞	‖ +∞	↘	2	↗	+∞

• Tiệm cận :

$x=-1$ là pt t/c đứng; $y=x+1$ là pt t/c xiên

• Đồ thị :độc giả tự vẽ.

2/ Chứng minh không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua $I(-1,0)$ là giao điểm của 2 tiệm cận.

Gọi $M_o(x_o,y_o)\in(C) \Leftrightarrow y_o=\dfrac{x_o^2+2x_o+2}{x_o+1}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_o

$$y-y_o=f'(x_o)(x-x_o) \Leftrightarrow y-y_o=\left(\dfrac{x_o^2+2x_o}{(x_o+1)^2}\right)(x-x_o)$$

Tiếp tuyến đi qua $I \Leftrightarrow 0-y_o=\dfrac{(x_o^2+2x_o)(-1-x_o)}{(x_o+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \dfrac{x_o^2+2x_o+2}{x_o+1}=\dfrac{x_o^2+2x_o}{x_o+1}$$

$\Leftrightarrow 2=0$: Vô lí. Vậy không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua $I(-1,0)$

XI) DỰ BỊ 2 KHỐI D năm 2005:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$.
2. Tìm m để phương trình $\dfrac{x^2+3x+3}{|x+1|}=m$ có 4 nghiệm phân biệt

<u>Giải</u>:

1/ Khảo sát $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ (C)

- MXĐ: $D=R\setminus\{-1\}$
- $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}, y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$

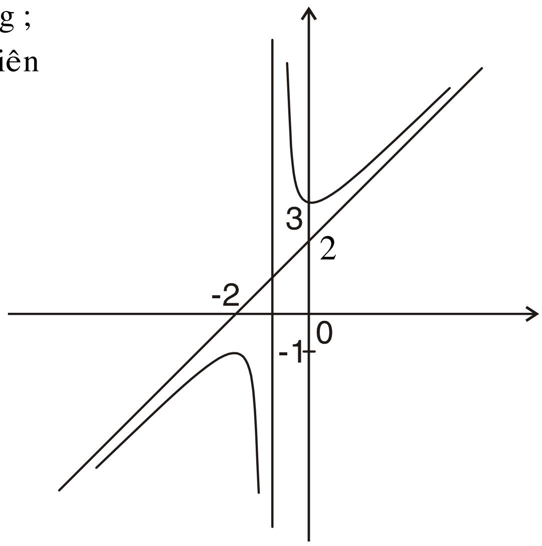
• Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	–	||	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

• Tiệm cận :

x = -1 là tc đứng ;

y = x + 2 là tc xiên



2/ Tìm m để pt $\dfrac{x^2+3x+3}{|x+1|} = m$ có 4 nghiệm phân biệt

Ta có $y = \dfrac{x^2+3x+3}{|x+1|} = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+3}{x+1} \text{ nếu } x > -1 \\ -\dfrac{(x^2+3x+3)}{x+1} \text{ nếu } x < -1 \end{cases}$

Do đó đồ thị $y = \dfrac{x^2+3x+3}{|x+1|}$ có được bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) khi x > -1
- Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị (C) khi x< -1

Do đó, nhờ đồ thị $y = \dfrac{x^2+3x+3}{|x+1|}$, ta thấy để pt $\dfrac{x^2+3x+3}{|x+1|} = m$ có 4 nghiệm phân biệt ta chọn m > 3.

Th.S **PHẠM HỒNG DANH**

(Trung tâm luyện thi chất lượng cao Vĩnh Viễn)