PHƯƠNG TRÌNH VÀ HÀM SỐ BẬC 4

I. CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

Ta thường gặp các dạng đặc biệt sau :

Dạng 1: Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

Đặt $t = x^2$, ta có phương trình : $at^2 + bt + c = 0$ (1')

Nghiệm dương của (1') ứng với 2 nghiệm của (1)

Vậy điều kiện cần và đủ để (1) có nghiệm là phương trình (1') có ít nhất một nghiệm không âm.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (a \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \geq 0 \\ f(t) = at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$$

$$t = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t}$$

(1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$(1') có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$;

(1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$(1') có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$

(1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$(1') có 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow P < 0$ hay $\begin{cases} \Delta = 0 \\ S/2 > 0 \end{cases}$;

(1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$((1') có nghiệm thỏa $t_1 < 0 = t_2$) hay ((1') có nghiệm thỏa $t_1 = t_2 = 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \Delta = 0 \\ S/2 = 0 \end{cases}$$

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$(1') vô nghiệm hay (1') có 2 nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \ \vee \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta < 0 \ \vee \begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

(1) có 4 nghiệm là CSC $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \end{cases}$

Giải hệ pt : $\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ S = t_1 + t_2 \\ P = t_1.t_2 \end{cases}$

Dạng 2 : Phương trình bậc 4 có tính đối xứng :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (2)$$

* Nếu a = 0, ta có phương trình $x(bx^2 + cx + b) = 0$

* Nếu $a \neq 0$, ta có phương trình tương đương :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ phương trình cho viết thành

$a(t^2 - 2) + bt + c = 0$ (2') với $|t| \geq 2$

<u>*Chú ý*</u> *:* Khi khảo sát hàm số : $t = x + \frac{1}{x}$, ta có :

* Một nghiệm lớn hơn 2 của phương trình (2') sẽ tương ứng với 2 nghiệm dương của phương trình (2).

* Một nghiệm nhỏ hơn 2 của phương trình (2') sẽ tương ứng với 2 nghiệm âm của phương trình (2)

* Một nghiệm t = 2 của phương trình (2') sẽ tương ứng với nghiệm x = 1 của phương trình (2)

* Một nghiệm t = – 2 của phương trình (2') sẽ tương ứng với nghiệm x = –1 của phương trình (2)

* phương trình $t = x + \frac{1}{x}$ vô nghiệm khi $|t| < 2$

Dạng 3 : $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ (3)

* Nếu a = 0, ta có phương trình $x(bx^2 + cx - b) = 0$

* Nếu $a \neq 0$, có phương trình tương đương

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, phương trình cho viết thành :

$a(t^2 + 2) + bt + c = 0$ (3') với $t \in R$.

<u>*Chú ý*</u> *:* phương trình $t = x - \frac{1}{x}$ có 2 nghiệm trái dấu với mọi t

Dạng 4 : $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ (C)

Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$, $t \in R$ thì với $\alpha = \frac{a-b}{2}$ pt (C) viết thành :

$(t - \alpha)^4 + (t + \alpha)^4 = c \Rightarrow$ phương trình trùng phương đã biết cách giải và biện luận.

Dạng 5 : $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$ với $a + b = c + d$. Đặt : $t = x^2 + (a + b)x$. Tìm đk của t bằng BBT.

I I . TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA HÀM BẬC 4

Cho hàm bậc 4 : $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$ có đồ thị (C).

Giả sử a > 0, (C) có trục đối xứng nếu ta tìm được các số α, β, γ, m sao cho :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + m \quad \forall x \in R.$$

Dùng đồng nhất thức cho ta có được các hệ số α, β, γ, m.

III . CỰC TRỊ CỦA HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG :

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$
$$y' = 4ax^3 + 2bx$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (1) \\ 2ax^2 + b = 0 & (2) \end{array}\right.$$

1. Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow$ a.b < 0
2. Hàm số có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép hoặc có nghiệm bằng 0.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \text{ và } b \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ và } ab \geq 0 \end{array}\right.$$

IV.CỰC TRỊ HÀM BẬC BỐN DẠNG :

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$$
$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow x(4ax^2 + 3bx + 2c) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ 4ax^2 + 3bx + 2c = 0 & (3) \end{array}\right.$$

1. Khi a > 0, ta có : Hàm số chỉ có 1 cực tiểu mà không có cực đại.
   $\Leftrightarrow$ (3) vô nghiệm hay (3) có nghiệm kép hay (3) có nghiệm x = 0.
2. Khi a < 0, ta có: Hàm số chỉ có 1 cực đại mà không có cực tiểu.
   $\Leftrightarrow$ (3) vô nghiệm hay (3) có nghiệm kép hay (3) có nghiệm x = 0.

TOÁN ÔN VỀ HÀM SỐ BẬC 4

Cho hàm số bậc 4 có đồ thị (C_a) với phương trình :

$$y = x^4 + 8ax^3 - 4(1 + 2a)x^2 + 3$$

I. Trong phần này ta khảo sát hàm số ứng với a = 0

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_o). Xác định tọa độ điểm uốn.
2) Định m để tiếp tuyến với (C_o) tại M có hoành độ m, cắt (C_o) tại hai điểm P, Q khác điểm M. Có giá trị nào của m để M là trung điểm đoạn PQ.
3) Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn PQ khi m thay đổi trong điều kiện câu 2.

II. Trong phần này ta khảo sát hàm số ứng với a = $-\frac{1}{2}$

4) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)
5) Cho đường thẳng (D) có phương trình y = ax + b. Tìm a, b để phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D) có hai nghiệm kép phân biệt α và β. Tìm tọa độ hai điểm chung.
6) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) và có hệ số góc bằng –8. Tìm tọa độ các tiếp điểm.

III. Trong phần này ta khảo sát hàm số trong trường hợp tổng quát.

7) Biện luận theo a số điểm cực trị của hàm số. Định a để hàm số chỉ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại.

8) Trong trường hợp đồ thị hàm số có ba điểm cực trị hãy viết phương trình parabol đi qua ba điểm cực trị này.

9) Định a để đồ thị có hai điểm uốn. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm uốn này.

BÀI GIẢI

PHẦN I:

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_0)

Khi a = 0 hàm số thành $y = x^4 - 4x^2 + 3$

$$y' = 4x^3 - 8x, \qquad y'' = 12x^2 - 8$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$

$y(0) = 3,\ y\left(\pm\sqrt{2}\right) = -1$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}; \qquad y\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) = \dfrac{7}{9}$

(C_0) có 2 điểm cực tiểu là $\left(\pm\sqrt{2}\ , -1\right)$ và 1 điểm cực đại là $(0,3)$

(C_0) có 2 điểm uốn là $\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}\ , \dfrac{7}{9}\right)$

Bảng biến thiên và đồ thị : bạn đọc tự làm.

2) Tiếp tuyến (D) tại $M\left(m\ , m^4 - 4m^2 + 3\right)$ thuộc (C_0) có phương trình:

$$y = y'(m)(x - x_M) + y_M$$

hay $y = \left(4m^3 - 8m\right)(x - m) + m^4 - 4m^2 + 3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (C_0) là

$$x^4 - 4x^2 + 3 = \left(4m^3 - 8m\right)(x - m) + m^4 - 4m^2 + 3 \qquad (1)$$

(Nhận xét: pt (1) chắc chắn nhận m làm nghiệm kép nên ta có:

(1) $\Leftrightarrow (x - m)^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 0$)

(1) $\Leftrightarrow\ x^4 - m^4 - 4\left(x^2 - m^2\right) = \left(x - m\right)\left(4m^3 - 8m\right)$

$\Leftrightarrow\ x - m = 0 \vee x^3 + mx^2 + m^2x + m^3 - 4\left(x + m\right) = 4m^3 - 8m$

$\Leftrightarrow\ x = m \quad \vee\ x^3 + mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x - 3m^3 + 4m = 0$ (2)

$\Leftrightarrow x = m \quad \vee \left(x - m\right)\left(x^2 + 2mx + 3m^2 - 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = m \quad \vee\ x^2 + 2mx + 3m^2 - 4 = 0$ (3)

Do đó, $\left(D\right)$ cắt $\left(C_0\right)$ tại 2 điểm P, Q khác m

$\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt khác m.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m^2 + 3m^2 - 4 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 3m^2 + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \neq \dfrac{2}{3} \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow (4) \begin{cases} m \neq \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ |m| < \sqrt{2} \end{cases}$$

Để M là trung điểm của PQ thì

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \qquad \Rightarrow\ m = -m\ \Rightarrow\ m = 0$$

(m = 0 thoả (4) nên nhận)

Nhận xét: pt (2) chắc chắn có nghiệm x = m.

3) I là trung điểm của PQ nên:

ta có $x_I = -m$

và $2y_I = y_P + y_Q = 2\left(m^4 - 4m^2 + 3\right) \Rightarrow \quad y_I = x_I^{\,4} - 4x_I^{\,2} + 3$

Vậy quĩ tích của I là 1 phần đồ thị của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$

với $|x| < \sqrt{2}$ và $x \neq \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

PHẦN II: Khảo sát hàm số với $a = -\dfrac{1}{2}$

4) Khảo sát và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ khi $a = -\dfrac{1}{2}$: độc giả tự làm.

$a = -\dfrac{1}{2}$, hàm số thành $y = x^4 - 4x^3 + 3$; $y' = 4x^3 - 12x^2$

5) Tìm a, b để phương trình hoành độ giao điểm của

$y = x^4 - 4x^3 + 3\,(C)$ và đường thẳng: $y = ax + b\ (D_1)$

có 2 nghiệm kép phân biệt α, β.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D_1) là

$$x^4 - 4x^3 + 3 = ax + b$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 4x^3 - ax + 3 - b = 0$$

Do đó, yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 4x^3 - ax + 3 - b = (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2 \qquad \forall x$$

mà $(x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 = x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 + (\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)x^2 - 2\alpha\beta(\alpha+\beta)x + \alpha^2\beta^2$

Do đó, yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(\alpha + \beta) = -4 \\ \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta = 0 = (\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = a \\ \alpha^2\beta^2 = 3 - b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 4 + 2\alpha\beta = 0\ (\alpha\beta = -2) \\ a = -8 \\ 3 - b = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a = -8$ và $b = -1$.

với $\alpha + \beta = 2$ và $\alpha\beta = -2$

$\Rightarrow (\alpha = 1-\sqrt{3}$ và $\beta = 1+\sqrt{3})$ hay $(\beta = 1-\sqrt{3}$ và $\alpha = 1+\sqrt{3})$

Khi đó, thế $x = 1 \pm \sqrt{3}$ và $y = -8x - 1$, ta có 2 điểm chung là

$$A\left(1 - \sqrt{3},\ -9 + 8\sqrt{3}\right) \text{ và } B\left(1 + \sqrt{3},\ -9 - 8\sqrt{3}\right)$$

6) Gọi x là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến có hệ số góc bằng –8, ta có: $4x^3 - 12x^2 = -8$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^3 - 12x^2 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ hay $x = 1 \pm \sqrt{3}$

$y(1) = 0$, $y(1 - \sqrt{3}) = -9 + 8\sqrt{3}$, $y(1 + \sqrt{3}) = -9 - 8\sqrt{3}$

Tiếp tuyến tại $(1,0)$ là $y = -8(x - 1)$ hay $y = -8x + 8$

Theo câu 5, 2 tiếp điểm tại A và B có cùng 1 tiếp tuyến là

$y = -8x - 1$

Tóm lại có 2 tiếp tuyến thỏa ycbt là :

$y = -8x + 8$ hay $y = -8x - 1$.

Các tiếp điểm là : $(1,0)$, $A(1 - \sqrt{3}, -9 + 8\sqrt{3})$ và $B(1 + \sqrt{3}, -9 - 8\sqrt{3})$

PHẦN III:

7) Số điểm cực trị của hàm số là nghiệm đơn hay nghiệm bội ba của đa thức:

$f'(x) = 4x^3 + 24ax^2 - 8(1 + 2a)x$

$= 4x\left[x^2 + 6ax - 2(1 + 2a)\right]$

Tam thức $g(x) = x^2 + 6ax - 2(1 + 2a)$ có :

$\Delta' = 9a^2 + 4a + 2 > 0$, $\forall a$ nên

i) Khi $a \neq -\frac{1}{2}$, $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0,

suy ra $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt

$\Rightarrow$ có 3 cực trị.

ii) Khi $a = -\frac{1}{2}$ thì $g(x) = 0$ có 1 nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm khác 0 $\Rightarrow f'(x) = 0$ có 1 nghiệm kép $x = 0$ và 1 nghiệm đơn

$\Rightarrow$ có 1 cực trị

Điều kiện cần để hàm chỉ có 1 cực trị là $a = -\frac{1}{2}$.

Khi $a = -\frac{1}{2}$, hàm đạt cực tiểu tại $x = 3$.

(Khi $a = -\frac{1}{2}$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x = 3$

với $x = 0$ là nghiệm kép và $x = 3$ là nghiệm đơn).

Vậy khi $a = -\frac{1}{2}$ thì hàm chỉ có cực tiểu và không có cực đại.

8) Khi $a \neq -\frac{1}{2}$, hàm số có 3 cực trị.

Gọi x_1, x_2, x_3 là hoành độ 3 điểm cực trị khi $a \neq -\frac{1}{2}$, ta có :

x_1, x_2, x_3 là nghiệm của $f'(x) = 0$.

Chia đa thức $f(x)$ cho $\frac{1}{4}f'(x)$ ta có:

$$f(x) = \frac{1}{4}f'(x)\left[x + 2a\right] - 2\left(6a^2 + 2a + 1\right)x^2 + 4\left(a + 2a^2\right)x + 3$$

Vậy 3 điểm cực trị thoả phương trình:

$$y = -2\left(6a^2 + 2a + 1\right)x^2 + 4\left(a + 2a^2\right)x + 3$$

vì $\quad f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$

Vậy, phương trình Parabol đi qua 3 điểm cực trị là :

$$y = -2\left(6a^2 + 2a + 1\right)x^2 + 4\left(a + 2a^2\right)x + 3$$

9) $y' = 4x^3 + 24ax^2 - 8(1 + 2a)x$

$y'' = 12x^2 + 48ax - 8(1 + 2a)$

$y'' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12ax - 2(1 + 2a) = 0 \qquad (9)$

Vì (9) có $\Delta' = 36a^2 + 6(1 + 2a)$

$$= 6\left(6a^2 + 2a + 1\right) > 0\ ,\ \forall a$$

nên đồ thị luôn có 2 điểm uốn I, J có hoành độ là nghiệm của phương trình (9)

<u>Hướng dẫn</u>: giả sử chia $f(x)$ cho $\frac{1}{4}f''(x)$ (vế trái của (9))

Ta có : $f(x) = \frac{1}{4}f''(x)\left[h(x)\right] + Ax + B$

thì phương trình đường thẳng qua 2 điểm uốn là: $y = Ax + B$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM HỌC 2002 <u>KHỐI B:</u>

<u>(ĐH: 2,0đ; CĐ: 2,5đ)</u>:

Cho hàm số : $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (1) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m=1 .
2. Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị .

BÀI GIẢI

1) $m = 1$, $y = x^4 - 8x^2 + 10$ (C). MXĐ : D = R

$y' = 4x^3 - 16x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2$

$y'' = 12x^2 - 16$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
y''		+	0	−	0	+	
(C)		lõm		lồi		lõm	

Điểm uốn $I_1\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}, \dfrac{10}{9}\right)$, $I_2\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{10}{9}\right)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	-6 CT	↗	10 CĐ	↘	-6 CT	↗	$+\infty$

2) $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$

$y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x$

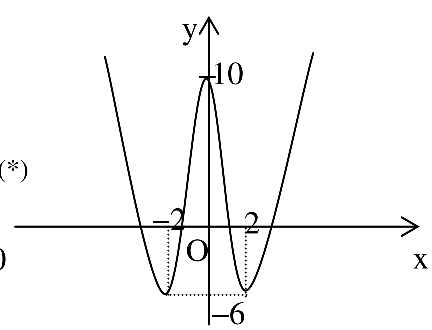
$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 + (m^2 - 9) = 0 (*) \end{array}\right.$

y có 3 cực trị $\Leftrightarrow$

(*) có 2 nghiệm phân biệt $\neq 0$

$\Leftrightarrow m(m^2 - 9) < 0$

$\Leftrightarrow m < -3 \vee 0 < m < 3$



ĐỀ DỰ BỊ 1 - NĂM 2002 – <u>KHỐI A</u>

(2,0 điểm) Cho hàm số: $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ (1) (m là tham số)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 8.

2) Xác định m sao cho đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

BÀI GIẢI

1) Khi $m = 8 \Rightarrow y = x^4 - 8x^2 + 7$

- MXĐ : D = **R.** •$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$

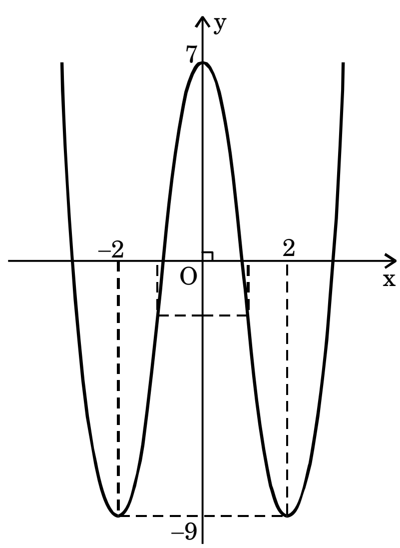
  $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 2$

- $y'' = 12x^2 - 16$; $y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 16 = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	lõm	-17/9	lồi	- 17/9	lõm	$+\infty$



2) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

- Phương trình hoành độ giao điểm : $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ (1)

  Đặt $t = x^2 \geq 0$, $t^2 - mt + m - 1 = 0$ (2)

  Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt .

  $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 > 0 \\ S = t_1 + t_2 = m > 0 \\ P = t_1 t_2 = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG - DỰ BỊ 1 - NĂM 2004 - KHỐI A

(2 điểm) Cho hàm số : $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (1) với m là tham số

1) Khảo sát hàm số (1) khi m = 1.

2) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

BÀI GIẢI

1) Khi m = 1 thì $y = x^4 - 2x^2 + 1$ MXĐ : D = **R**

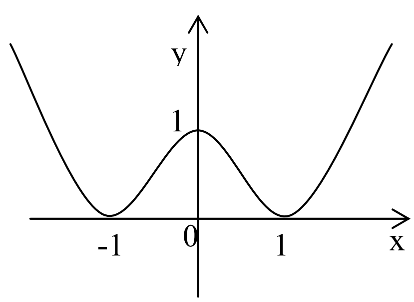
$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 1$

$y'' = 12x^2 - 4$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y(0) = 1$; $y(\pm 1) = 0$; $y(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{4}{9}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y''		+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	lõm	$\frac{4}{9}$	lồi	$\frac{4}{9}$	lõm	$+\infty$



2) $y' = 4x^3 - 4m^2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm|m|$.

Hàm có 3 cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi A (0;1) ; B, C là 2 điểm cực trị có hoành độ là $\pm|m|$

suy ra tung độ của B và C là $1 - m^4$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-|m|; -m^4)$ và $\overrightarrow{AC} = (|m|; -m^4)$ .Vì y là hàm chẵn nên

AC = AB. Do đó, yêu cầu bt $\Leftrightarrow m \neq 0$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow m \neq 0$ và $-m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m^6 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

DỰ BỊ 1 KHỐI B NĂM 2005:

(2 điểm). 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$

2. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt : $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0$.

1/ Khảo sát $y = x^4 - 6x^2 + 5$

MXĐ: D= R

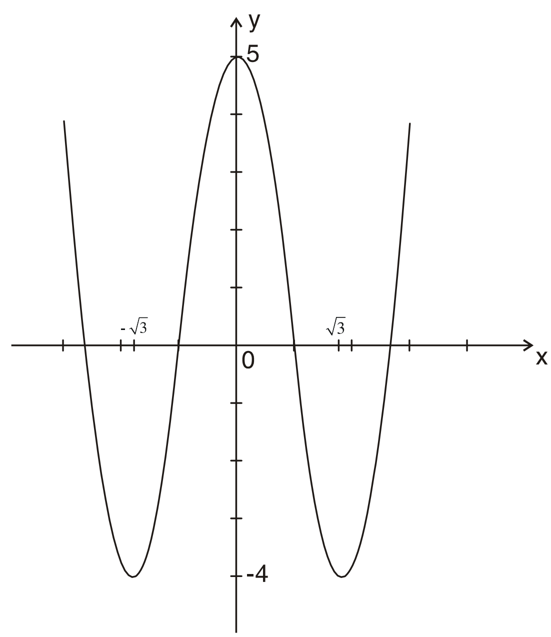
$y' = 4x^3 - 12x = 4x\left(x^2 - 3\right), y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = \pm\sqrt{3}$

$y'' = 12x^2 - 12, y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

BBT

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		-	0	+		+	0	-		-	0	+	
y''		+		+	0	-		-	0	+		+	
y	$+\infty$						5						$+\infty$
			-4		0				0		-4		

Đồ thị



2/ Tìm m để pt $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

$x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = \log_2 m + 5$

Đặt $k = \log_2 m + 5$

Ycbt $\Leftrightarrow$ đường thẳng y= k cắt (C) tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow -4 < k < 5 \quad \Leftrightarrow -4 < \log_2 m + 5 < 5 \Leftrightarrow -9 < \log_2 m < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^9} < m < 1$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ :

I . (ĐH KT QUỐC DÂN HÀ NỘI, NĂM 1 9 9 7)

Cho hàm số : $y = (2 - x^2)^2$ (1)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

2) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A (0; 4).

II . (ĐH QG TP HCM (đợt 3) , NĂM 1 9 9 8)

Cho hàm số : $y = m^2 x^4 - 2x^2 + m$ (1) với m là tham số khác không.

1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

2) Khảo sát sự biến thiên của hàm số (1) khi $m \neq 0$. Từ đó xác định m sao cho $m^2 x^4 - 2x^2 + m \geq 0$ với mọi số thực x.

III . (ĐH Y DƯỢC TP HCM , NĂM 1 9 9 8)

Cho hàm số : $y = -x^4 + 2(m+1)x^2 - 2m - 1$ (1) với m là tham số

1) Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ tạo thành 1 cấp số cộng.

2) Gọi (C) là đồ thị của hàm số (1) khi m = 0. Tìm tất cả các điểm trên trục tung sao cho từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (C).

ThS. PHẠM HỒNG DANH

TT luyện thi chất lượng cao Vĩnh Viễn