CHƯƠNG VIII
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

Trường hợp 1: TỔNG HAI SỐ KHÔNG ÂM

Áp dụng: Nếu $\begin{cases} A \ge 0 \wedge B \ge 0 \\ A + B = 0 \end{cases}$ thì $A = B = 0$

Bài 156 Giải phương trình:

$$4\cos^2 x + 3tg^2x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}tgx + 4 = 0 \quad (*)$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \left(2\cos x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}tgx + 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ tgx = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ tgx = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Bài 157 Giải phương trình:

$$8\cos 4x.\cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0 \ (*)$$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 4\cos 4x\left(1 + \cos 4x\right) + 1 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(4\cos^2 4x + 4\cos 4x + 1\right) + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos 4x + 1\right)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ 3x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{k2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \ \text{(có 3 đầu ngọn cung)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + m2\pi \text{ hay } x = m2\pi \text{ hay } x = \dfrac{2\pi}{3} + m2\pi\ ,\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + m2\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

(ta nhận $k = \pm 1$ và loại $k = 0$)

Bài 158	Giải phương trình: $\sin^2 x + \dfrac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x\right) = \sin x \sin^2 3x\ (*)$

Ta có: $\cos 3x.\sin^3 3x + \sin 3x.\cos^3 x$

$= \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\sin^3 x + \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\cos^3 x$

$= -3\cos x \sin^3 x + 3\sin x \cos^3 x = 3\sin x \cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$

$= \dfrac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x = \dfrac{3}{4}\sin 4x$

Vậy: $(*) \Leftrightarrow \sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x$ và $\sin 4x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin^2 3x - \sin x\right)^2 - \frac{1}{4}\sin^4 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0 \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin^2 3x - \sin x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x\left(1 - \sin^2 3x\right) = 0 \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin^2 3x - \sin x\right)^2 + \frac{1}{16}\sin^2 6x = 0 \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}\sin^2 3x = \sin x \\ \sin 3x = 0 \vee \cos 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin 3x = 0 \\ \sin x = 0\ (\text{VN}) \end{cases} \vee \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} = \sin x \\ \sin 3x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \\ 3\sin x - 4\sin^3 x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

<u>Trường hợp 2</u> Phương pháp đối lập

Nếu $\begin{cases} A \leq M \leq B \\ A = B \end{cases}$ thì $A = B = M$

<u>Bài 159</u>	Giải phương trình: $\sin^4 x - \cos^4 x = \lvert\sin x\rvert + \lvert\cos x\rvert$ (*)

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \lvert\sin x\rvert + \lvert\cos x\rvert$

$\Leftrightarrow -\cos 2x = \lvert\sin x\rvert + \lvert\cos x\rvert$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ \cos^2 2x = 1 + 2\lvert\sin x\rvert\lvert\cos x\rvert \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ -\sin^2 2x = 2\lvert\sin 2x\rvert \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ \sin 2x = 0 \ (\cos 2x = \pm 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>Cách khác</u>

Ta có $\sin^4 x - \cos^4 x \leq \sin^4 x \leq \lvert\sin x\rvert \leq \lvert\sin x\rvert + \lvert\cos x\rvert$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^4 x = \lvert\sin x\rvert \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 160:</u>	Giải phương trình: $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$ (*)

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 4\sin^2 3x.\sin^2 x = 6 + 2\sin 3x$

- Do: $\sin^2 3x \leq 1$ và $\sin^2 x \leq 1$

  nên $4\sin^2 3x\sin^2 x \leq 4$
- Do $\sin 3x \geq -1$ nên $6 + 2\sin 3x \geq 4$

  Vậy $4\sin^2 3x\sin^2 x \leq 4 \leq 6 + 2\sin 3x$

  Dấu = của phương trình (*) đúng khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sin^2 3x = 1\\ \sin^2 x = 1\\ \sin 3x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x = 1\\ \sin 3x = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\\ \sin 3x = -1\end{cases} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 161 Giải phương trình: $\dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = 2\cos 2x \, (*)$

Điều kiện: $\sin x \geq 0 \wedge \cos x \geq 0$

Ta có: (*)

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x - \sin x = 0 & (1)\\ 1 + \sin x \cos x = 2(\cos x + \sin x)\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\right) & (2)\end{array}\right.$$

Ta có:

- $(1) \Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Xét (2)

Ta có: khi $\sin x \geq 0$ thì $\sqrt{\sin x} \geq \sin x \geq \sin^2 x$

Tương tự $\sqrt{\cos x} \geq \cos x \geq \cos^2 x$

Vậy $\sin x + \cos x \geq 1$ và $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq 1$

Suy ra vế phải của (2) thì ≥ 2

Mà vế trái của (2): $1 + \dfrac{1}{2}\sin 2x \leq \dfrac{3}{2}$

Do đó (2) vô nghiệm

Vậy: (*) $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 162: Giải phương trình: $\sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2 \, (*)$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{3 - \cos x} = 2 + \sqrt{\cos x + 1}$

$\Leftrightarrow 3 - \cos x = 5 + \cos x + 4\sqrt{\cos x + 1}$

$\Leftrightarrow -2(\cos x + 1) = 4\sqrt{\cos x + 1}$

Ta có: $-2(\cos x + 1) \leq 0 \, \forall x$

mà $4\sqrt{\cos x + 1} \geq 0 \, \forall x$

Do đó dấu = của (*) xảy ra $\Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad, k \in \mathbb{Z}$

Bài 163: Giải phương trình:

$$\cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x} = 2\left(1+\sin^2 2x\right) \quad (*)$$

Do bất đẳng thức Bunhiacốpski:

$$|AX+BY| \le \sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{X^2+Y^2}$$

nên: $\left|1\cos 3x + 1\sqrt{2-\cos^2 3x}\right| \le \sqrt{2}.\sqrt{\cos^2 3x + \left(2-\cos^2 3x\right)} = 2$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \cos 3x = \sqrt{2-\cos^2 3x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \ge 0 \\ \cos^2 3x = 2-\cos^2 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \ge 0 \\ \cos 3x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x = 1$$

Mặt khác: $2\left(1+\sin^2 2x\right) \ge 2$

dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

Vậy: $\cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x} \le 2 \le 2\left(1+\sin^2 2x\right)$

dấu = của (*) chỉ xảy ra khi:

$\cos 3x = 1 \wedge \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \ \text{(có 4 đầu ngọn cung)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Bài 164: Giải phương trình: $tg^2x + cotg^2x = 2\sin^5\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (*)

Điều kiện: $\sin 2x \ne 0$

- Do bất đẳng thức Cauchy: $tg^2x + cotg^2x \ge 2$

  dấu = xảy ra khi $tgx = cotgx$

- Mặt khác: $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$

nên $2\sin^5\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \le 2$

dấu = xảy ra khi $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

Do đó: $tg^2x + cotg^2x \ge 2 \ge 2\sin^5\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Dấu = của (*) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} tgx = cotgx \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tg^2 x = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Trường hợp 3:

Áp dụng: Nếu $\begin{cases} A \le M \text{ và } B \le M \\ A + B = M + N \end{cases}$ thì $\begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}$

$$\sin u + \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \end{cases}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$$

$$\sin u + \sin v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$$

Tương tự cho các trường hợp sau

$\sin u \pm \cos v = \pm 2$; $\cos u \pm \cos v = \pm 2$

Bài 165: Giải phương trình: $\cos 2x + \cos \dfrac{3x}{4} - 2 = 0 \; (*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos \dfrac{3x}{4} = 2$

Do $\cos 2x \le 1$ và $\cos \dfrac{3x}{4} \le 1$

nên dấu = của (*) chỉ xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos \dfrac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{8h\pi}{3}, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Do : $k\pi = \dfrac{8h\pi}{3} \Leftrightarrow k = \dfrac{8h}{3}$

để k nguyên ta chọn $h = 3m \; (m \in Z)$ (thì $k = 8m$)

Cách khác

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos \dfrac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos \dfrac{3k\pi}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Bài 166: Giải phương trình:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x . \cos 2x . \cos 3x + 2 \; (*)$$

$$\begin{aligned}\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x &= 2\cos 3x\cos x+2\cos^2 3x-1\\ &= 2\cos 3x(\cos x+\cos 3x)-1\\ &= 4\cos 3x.\cos 2x.\cos x-1\end{aligned}$$

Vậy: $\cos 3x.\cos 2x.\cos x=\frac{1}{4}(\cos 2x+6\cos 4x+\cos 6x+1)$

Do đó:

$$(*)\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)+\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=1\\ \cos 4x=1\\ \cos 6x=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2x=k2\pi, k\in\mathbb{Z} & (1)\\ \cos 4x=1 & (2)\\ \cos 6x=1 & (3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

(Thế (1) vào (2) và (3) ta thấy hiển nhiên thỏa)

Bài 167: Giải phương trình:

$$\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+4=0\ (*)$$

Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow 2=\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+h2\pi, h\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{3}+h2\pi, h\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+h\pi, h\in\mathbb{Z}$$

Cách khác

$$(*)\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1\\ x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+h2\pi, h\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

Bài 168: Giải phương trình: $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1 (*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 4\cos x - 2\left(2\cos^2 x - 1\right) - \left(1 - 2\sin^2 2x\right) = 1$

$\Leftrightarrow 4\cos x - 4\cos^2 x + 8\sin^2 x\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 - \cos x + 2\sin^2 x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 + \cos x\left(2\sin^2 x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 - \cos x\cos 2x = 0 (**)$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 - \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos 3x + \cos x = 2$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 4\cos^3 x - 3\cos x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Cách khác

$(**) \Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $\cos x\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \begin{cases} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (loại)} \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 169: Giải phương trình:

$$tg2x + tg3x + \frac{1}{\sin x\cos 2x\cos 3x} = 0 (*)$$

Điều kiện: $\sin 2x\cos 2x\cos 3x \neq 0$

Lúc đó:

$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{1}{\sin x.\cos 2x.\cos 3x} = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x\sin x\cos 3x + \sin 3x\sin x.\cos 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin 2x\cos 3x + \sin 3x\cos 2x\right) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x.\sin 5x = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 4x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x - \cos 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x = 1 \\ \cos 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \\ 4t^3 - 3t = 1 \\ 2t^2 - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \\ 4t^3 - 3t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Do đó: (*) vô nghiệm.

<u>Cách khác</u>

$$\Leftrightarrow \sin x.\sin 5x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 5x = -1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 5x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \varnothing$$

<u>Bài 170:</u> Giải phương trình: $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0(*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 4x - 1 = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 4x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

<u>Cách khác</u>

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 6x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2x = \pi + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \cos 6x = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

<u>Cách khác</u>

$$\begin{cases} \cos 8x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 1 \\ 4x = k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Trường hợp 4: DÙNG KHẢO SÁT HÀM SỐ

$y = a^x$ là hàm giảm khi $0 < a < 1$.

Do đó ta có

$$|\sin x|^m < |\sin x|^n \Leftrightarrow n > m, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$|\cos x|^m < |\cos x|^n \Leftrightarrow n > m, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$|\sin x|^m \leq |\sin x|^n \Leftrightarrow n \geq m, \forall x$$

$$|\cos x|^m \leq |\cos x|^n \Leftrightarrow n \geq m, \forall x$$

<u>Bài 171:</u> Giải phương trình: $1 - \frac{x^2}{2} = \cos x \ (*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 1 = \frac{x^2}{2} + \cos x$

Xét $y = \frac{x^2}{2} + \cos x$ trên R

Ta có: $y' = x - \sin x$

và $y'' = 1 - \cos x \geq 0 \ \forall x \in R$

Do đó y'(x) là hàm đồng biến trên R

Vậy $\forall x \in (0, \infty) : x > 0$ nên $y'(x) > y'(0) = 0$

$\forall x \in (-\infty, 0) : x < 0$ nên $y'(x) < y'(0) = 0$

Do đó:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Vậy : $y = \frac{x^2}{2} + \cos x \geq 1 \ \forall x \in R$

Dấu = của (*) chỉ xảy ra tại x = 0

Do đó $(*) \Leftrightarrow x = 0 \bullet$

Bài 172: Giải phương trình

$$\sin^4 x + \sin^6 x = \sin^8 x + \sin^{10} x \quad (*)$$

Ta có

$$\begin{cases} \sin^4 x \ge \sin^8 x \text{ và dấu = xảy ra khi và chỉ khi } \sin^2 x = 1 \text{ hay } \sin x = 0 \\ \sin^6 x \ge \sin^{10} x \text{ và dấu = xảy ra khi và chỉ khi } \sin^2 x = 1 \text{ hay } \sin x = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \vee \sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad \vee x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Cách khác

$(*) \Leftrightarrow \sin^4 x = 0$ *hay* $1 + \sin^2 x = \sin^4 x + \sin^6 x$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ *hay* $\sin^2 x = 1$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $\lg\left(\sin^2 x\right) - 1 + \sin^3 x = 0$
2. $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
3. $\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x$
4. $\pi^{\sin\sqrt{x}} = |\cos x|$
5. $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x.\sin x$
6. $\left(\cos 4x - \cos 2x\right)^2 = 5 + \sin 3x$
7. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(2 - \sin 3x\right)$
8. $\sin 3x\left(\cos 2x - 2\sin 3x\right) + \cos 3x\left(1 + \sin 2x - 2\cos 3x\right) = 0$
9. $tgx + tg2x = -\sin 3x\cos 2x$
10. $2\log_a\left(\cot gx\right) = \log_2\left(\cos x\right)$
11. $2^{\sin x} = \cos x$ với $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
12. $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$
13. $\cos 2x - \cos 6x + 4\left(\sin 2x + 1\right) = 0$
14. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(2 - \cos 3x\right)$
15. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$
16. $\cos^2 x - 4\cos x - 2x\sin x + x^2 + 3 = 0$
17. $2^{|\sin x|} + |\sin x| = \sin^2 x + \cos x$
18. $3\cot g^2 x + 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cot gx - 4\cos x + 2 = 0$