CHƯƠNG VII

# PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA CĂN VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

## A) PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA CĂN

**Cách giải :** Áp dụng các công thức

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$$

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

**Ghi chú :** Do theo phương trình chỉnh lý đã bỏ phần bất phương trình lượng giác nên ta xử lý điều kiện $B \geq 0$ bằng phương pháp thử lại và chúng tôi bỏ các bài toán quá phức tạp.

**Bài 138** : Giải phương trình $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0\,(*)$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ 5\cos x - \cos 2x = 4\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ 5\cos x - \left(2\cos^2 x - 1\right) = 4\left(1 - \cos^2 x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \vee \cos x = -3\,(\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Bài 139** : Giải phương trình

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^3 x\cot gx + \cos^3 xtgx = \sqrt{2\sin 2x}$$

Điều kiện :

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin 2x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \sin 2x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x > 0$$

Lúc đó :

$$(*) \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x\cos x + \cos^2 x\sin x = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x(\cos x + \sin x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x + \cos x \geq 0\\ (\sin x + \cos x)^2 = 2\sin 2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ 1 + \sin 2x = 2\sin 2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ \sin 2x = 1 (\text{nhận do } \sin 2x > 0)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ x = \dfrac{\pi}{4} + m2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{4} + m2\pi (\text{loại}), m \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$$

**Bài 140** : Giải phương trình $\sqrt{1 + 8\sin 2x.\cos^2 2x} = 2\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)(*)$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ 1 + 8\sin 2x\cos^2 2x = 4\sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ 1 + 4\sin 2x(1 + \cos 4x) = 2\left[1 - \cos(6x + \dfrac{\pi}{2})\right]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ 1 + 4\sin 2x + 2(\sin 6x - \sin 2x) = 2(1 + \sin 6x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

So lại với điều kiện $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

•Khi $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ thì

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+3k\pi\right) = \cos k\pi$$

$$= \left[\begin{array}{l} 1\ ,(\text{nếu k chẵn})(\text{nhận}) \\ -1,(\text{nếu k lẻ})(\text{loại}) \end{array}\right.$$

• Khi $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ thì

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+3k\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

$$= \left[\begin{array}{l} -1,\text{nếu k chẵn (loại)} \\ 1,\ \text{nếu k lẻ (nhận)} \end{array}\right.$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + m2\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 141</u> : Giải phương trình $\frac{\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x} = 4\cos x\,(*)$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow \sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x} = 2\sin 2x$

( hiển nhiên sinx = 0 không là nghiệm , vì sinx =0 thì VT = 2, VP = 0 )

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+2\sqrt{1-\sin^2 2x} = 4\sin^2 2x \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-\sin^2 2x} = 2\sin^2 2x - 1 \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sin^2 2x = 4\sin^4 2x - 4\sin^2 2x + 1 \\ \sin^2 2x \geq \frac{1}{2} \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x\left(4\sin^2 2x - 3\right) = 0 \\ \sin 2x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \vee 2x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in \mathbb{Z}$$

Chú ý : Có thể đưa về phương trình chứa giá trị tuyệt đối

$$(*)\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 0\\ |\cos x-\sin x|+|\cos x+\sin x|=2\sin 2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |\cos x-\sin x|+|\cos x+\sin x|=2\sin 2x$$

**Bài 142** : Giải phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{\sin x+\sqrt{3}\cos x}=2\ (*)$

Đặt $t=\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sin x+\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$(*)$ thành $t+\sqrt{t}=2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t}=2-t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2-t\geq 0\\ t=4-4t+t^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}t\leq 2\\ t^2-5t+4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t\leq 2\\ t=1\vee t=4\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$

Do đó $(*)$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ hay } x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in \mathbb{Z}$$

**Bài 143** : Giải phương trình

$$3\sqrt{tgx+1}\left(\sin x+2\cos x\right)=5\left(\sin x+3\cos x\right)(*)$$

Chia hai vế của (*) cho $\cos x\neq 0$ ta được

$$(*)\Leftrightarrow 3\sqrt{tgx+1}\left(tgx+2\right)=5\left(tgx+3\right)$$

Đặt $u=\sqrt{tgx+1}$ với $u\geq 0$

Thì $u^2-1=tgx$

(*) thành $3u\left(u^2+1\right)=5\left(u^2+2\right)$

$$\Leftrightarrow 3u^3-5u^2+3u-10=0$$

$$\Leftrightarrow (u-2)\left(3u^2+u+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow u=2\vee 3u^2+u+5=0\text{(vô nghiệm)}$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \sqrt{tgx+1} = 2$

$\Leftrightarrow tgx + 1 = 4$

$\Leftrightarrow tgx = 3 = tg\alpha\left(\text{với } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Bài 144** : Giải phương trình $\left(\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{\cos x}\right)\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x \,(*)$

$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{\cos x}\right)\cos 2x = \sin 2x \cos 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$ hay $\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{\cos x} = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin 2x \geq 0 \\ 1 + 2\sqrt{(1-\cos x)\cos x} = \sin^2 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin 2x \geq 0 \\ 1 + 2\sqrt{(1-\cos x)\cos x} = \sin^2 2x \ (VT \geq 1 \geq VP) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + h\pi \text{ hay } x = \pm\frac{5\pi}{4} + h\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin 2x \geq 0 \\ \sin^2 2x = 1 \\ (1-\cos x)\cos x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$

hay $\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos x = 0 \,(\Rightarrow \sin 2x = 0) \end{cases}$ hay $\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos x = 1 \,(\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$

**Bài 145** : Giải phương trình $\sin^3 x(1 + \cot gx) + \cos^3 x(1 + tgx) = 2\sqrt{\sin x \cos x}\,(*)$

$(*) \Leftrightarrow \sin^3 x\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \geq 0 \\ 1 + \sin 2x = 2\sin 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \geq 0 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + h2\pi \text{ hay } x+\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}$$

**Bài 146** : Giải phương trình $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1+\sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$ (*)

Điều kiện $\cos 2x \geq 0$ và $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\cos x + \sin x}$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + (\cos x + \sin x)^2 + 2\sqrt{\cos 2x}\sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 4(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x + \sin x) + (\sin x + \cos x)\sqrt{\cos 2x} = 2(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ \sqrt{\cos 2x} = 2 - \cos x \quad (**) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ \cos 2x = 4 - 4\cos x + \cos^2 x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee \cos^2 x + 4\cos x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee \cos x = 1 \vee \cos x = -5 \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Thử lại : • $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ thì $\cos 2x = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (nhận)

Và $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin k\pi = 0$ (nhận)

• $x = k2\pi$ thì $\cos 2x = 1$ (nhận)

và $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} > 0$ (nhận)

Do đó (*) $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý : Tại (**) có thể dùng phương trình lượng giác không mực

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**<u>Cách khác</u>**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\cos x + \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\cos x + \sin x).(\cos x - \sin x)} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\cos x + \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \text{ hay } \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{(\cos x + \sin x)} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \text{ hay } \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ 2\cos x + 2\sqrt{\cos 2x} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \text{ hay } \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ \cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hay } \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

( **<u>nhận xét</u>**: khi cosx =1 thì sinx = 0 và sinx + cosx = 1 > 0 )

# <u>BÀI TẬP</u>

1. Giải phương trình :

a/ $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$

b/ $\dfrac{\cos\frac{4x}{3} - \cos^2 x}{\sqrt{1 - tg^2 x}} = 0$

c/ $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

d/ $\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 2} = 2\sin x - 1$

e/ $2\sqrt{3\sin x} = \dfrac{3tgx}{2\sqrt{\sin x} - 1} - \sqrt{3}$

f/ $\dfrac{\sin^2 2x + \cos^4 2x - 1}{\sqrt{\sin\cos x}} = 0$

g/ $8\cos 4x\cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$

h/ $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$

k/ $\sqrt{5-3\sin^2 x-4\cos x}=1-2\cos x$

l/ $\cos 2x=\cos^2 x\sqrt{1+tgx}$

2. Cho phương trình :

$$\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=m\cos x\,(1)$$

a/ Giải phương trình khi m = 2

b/ Giải và biện luận theo m phương trình (1)

3. Cho f(x) = $3\cos^6 2x + \sin^4 2x + \cos 4x - m$

a/ Giải phương trình f(x) = 0 khi m = 0

b/ Cho $g(x)=2\cos^2 2x\sqrt{3\cos^2 2x+1}$. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình f(x) = g(x) có nghiệm.

$(\text{ĐS}: 1 \le m \le 0)$

4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=m$$

$$\left(\text{ĐS}: \sqrt{1+\sqrt{3}} \le m \le 2\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$$

## B) PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA CÁC TRỊ TUYỆT ĐỐI

**Cách giải** : 1/ Mở giá trị tuyệt đối bằng định nghĩa

2/ Áp dụng

$$\bullet |A|=|B| \Leftrightarrow A=\pm B$$

$$\bullet |A|=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=\pm B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A^2=B^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \\ A=B\end{cases} \vee \begin{cases} A<0 \\ A=-B\end{cases}$$

**Bài 147** : Giải phương trình $|\cos 3x| = 1-\sqrt{3}\sin 3x \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{3}\sin 3x \ge 0 \\ \cos^2 3x = 1-2\sqrt{3}\sin 3x + 3\sin^2 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 1-\sin^2 3x = 1-2\sqrt{3}\sin 3x + 3\sin^2 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 4\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin 3x = 0 \vee \sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

**Bài 148** : Giải phương trình $3\sin x + 2|\cos x| - 2 = 0\,(*)$

$$(*) \Leftrightarrow 2|\cos x| = 2 - 3\sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3\sin x \ge 0 \\ 4\cos^2 x = 4 - 12\sin x + 9\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \dfrac{2}{3} \\ 4\left(1 - \sin^2 x\right) = 4 - 12\sin x + 9\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \dfrac{2}{3} \\ 13\sin^2 x - 12\sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \dfrac{2}{3} \\ \sin x = 0 \vee \sin x = \dfrac{12}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Bài 149** : Giải phương trình $\sin x\cos x + |\sin x + \cos x| = 1\,(*)$

Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

Với điều kiện : $0 \le t \le \sqrt{2}$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Do đó (*) thành : $\dfrac{t^2 - 1}{2} + t = 1$

$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -3$ (loại)

Vậy $(*) \Leftrightarrow 1^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

**Bài 150** : Giải phương trình $|\sin x - \cos x| + 2\sin 2x = 1\,(*)$

Đặt $t = |\sin x - \cos x|$ (điều kiện $0 \le t \le \sqrt{2}$)

Thì $t^2 = 1 - \sin 2x$

$(*)$ thành: $t + 2\left(1 - t^2\right) = 1$

$\Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\dfrac{1}{2}$ (loại do điều kiện)

khi $t = 1$ thì $1^2 = 1 - \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

**Bài 151** : Giải phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x| \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = |\sin x| + |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2x = |\sin x| + |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos 2x \ge 0 \\ \cos^2 2x = 1 + 2|\sin x||\cos x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ 1 - \sin^2 2x = 1 + |\sin 2x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ |\sin 2x| = -\sin^2 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \cos^2 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Bài 152** : Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x} \quad (*)$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\left(2\cos^2 x - 1\right)}$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \cos x.\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x > 0 \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \begin{cases} \cos x > 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Bài 153** : Tìm các nghiệm trên $(0,2\pi)$ của phương trình :

$$\frac{\sin 3x-\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\sin 2x+\cos 2x\,(*)$$

Ta có : $(*)\Leftrightarrow \dfrac{2\cos 2x\sin x}{\sqrt{2}\left|\sin x\right|}=\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện : $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$

• Khi $x\in(0,\pi)$ thì $\sin x>0$ nên :

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos 2x=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x=\pm\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Do $x\in(0,\pi)$ nên $x=\dfrac{\pi}{16}$ hay $x=\dfrac{9\pi}{16}$

Khi $x\in(\pi,2\pi)$ thì $\sin x<0$ nên :

$$(*)\Leftrightarrow -\cos 2x=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi-2x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\pm(\pi-2x)+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Do $x\in(\pi,2\pi)$ nên $x=\dfrac{21\pi}{16}\vee x=\dfrac{29\pi}{16}$ •

**Bài 154** Cho phương trình : $\sin^6 x+\cos^6 x=a\left|\sin 2x\right|\,(*)$

Tìm a sao cho phương trình có nghiệm.

Ta có :

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)$$

$$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Đặt $t=\left|\sin 2x\right|$ điều kiện $0\le t\le 1$

thì (*) thành : $1-\frac{3}{4}t^2 = at \quad (**)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t}-\frac{3}{4}t = a \quad \text{(do t = 0 thì (**) vô nghiệm)}$$

Xét $y=\frac{1}{t}-\frac{3}{4}t$ trên $D=(0,1]$

thì $y'=-\frac{1}{t^2}-\frac{3}{4}<0$

| $t$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $y$ | $\Vert +\infty$ | $\searrow$ | $\frac{1}{4}$ |

Do đó : (*) có nghiệm $\Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4}$ •

**Bài 155** Cho phương trình $\cos 2x = m\cos^2 x\sqrt{1+tgx} \quad (*)$

Tìm m để phương trình có nghiệm trên $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

Đặt $t = tgx$ thì

Vậy : (*) thành: $1-t^2 = m\sqrt{1+t} \quad (**)$ (chia 2 vế cho $\cos^2 \neq 0$)

Khi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ thì $t \in \left[0,\sqrt{3}\right]$

Vậy (**) $\Leftrightarrow m = \frac{1-t^2}{\sqrt{1+t}} = \frac{(1-t)(1+t)}{\sqrt{1+t}} = (1-t)\sqrt{1+t}$

Xét $y=(1-t)\sqrt{1+t}$ trên $\left[0,\sqrt{3}\right]$

Ta có

$$y' = -\sqrt{1+t}+\frac{(1-t)}{2\sqrt{1+t}} = \frac{-2(1+t)+(1-t)}{2\sqrt{1+t}}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-3t-1}{2\sqrt{1+t}} < 0 \quad \forall t \in \left[0,\sqrt{3}\right]$$

| $t$ | $0$ | | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | |
| $y$ | $1$ | $\searrow$ | $(1-\sqrt{3})\sqrt{1+\sqrt{3}}$ |

Do đó : (*) có nghiệm trên $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{1+\sqrt{3}} \le m \le 1$ •

## BÀI TẬP

1. Giải các phương trình

a/ $|\sin x - \cos x| = 1 - 4\sin 2x$

b/ $4\sin x + 3|\cos x| = 3$

c/ $|tgx| = \cot gx + \frac{1}{\cos x}$

d/ $\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(\frac{1+3\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

e/ $|\cot gx| = tgx + \frac{1}{\sin x}$

f/ $2\cos x - |\sin x| = 1$

g/ $\frac{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}}{\cos x} = 4\sin x$

h/ $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$

m/ $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$

n/ $|\cos x| + \sin 3x = 0$

r/ $|\cot gx| = tgx + \frac{1}{\sin x}$

s/ $|\cos x + 2\sin 2x - \cos 3x| = 1 + 2\sin x - \cos 2x$

o/ $\frac{tg^2 x}{|tgx - 1|} = |tgx + 1| + \frac{1}{|tgx - 1|}$

p/ $|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x| = 2$

2. $|\sin x + \cos x| + a\sin 2x = 1$

Tìm tham số a dương sao cho phương trình có nghiệm

3. Cho phương trình: $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m$

a/ Giải phương trình khi m = 0

b/ Tìm m để phương trình có nghiệm (ĐS $\sqrt{2} - 4 \le m \le \frac{65}{16}$)