

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG THEO $\sin x$, $\cos x$

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c \quad (1)$$

Cách giải

Đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

$$\text{Thì } t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ta có : $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ nên (1) thành

$$at + \frac{b}{2}(t^2 - 1) = c$$

$$\Leftrightarrow bt^2 + 2at - b - 2c = 0$$

Giải (2) tìm được t , rồi so với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

giải phương trình $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = t$ ta tìm được x

Bài 106 : Giải phương trình $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \sin x(1 + \sin x) + \cos x(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x) = 0 \text{ hay } \sin x + \cos x(1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 & (1) \\ \sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\bullet \text{Xét (2)} : \text{đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{điều kiện } |t| \leq \sqrt{2} \text{ thì } t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$$

$$\text{Vậy (2) thành } t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } (2) \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \cos \varphi \text{ với } 0 < \varphi < 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \varphi + h2\pi, h \in \mathbb{Z}, \text{ với } \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \varphi + h2\pi, h \in \mathbb{Z}, \text{ với } \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

Bài 107 : Giải phương trình $-1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow -1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \frac{3}{2} \sin 2x$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Với điều kiện } |t| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Thì } t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$$

$$\text{Vậy } (*) \text{ thành : } -1 + t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = \frac{3}{2}(t^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow -2 + t(3 - t^2) = 3(t^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + 4t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2 + \sqrt{3} \vee t = -2 - \sqrt{3} (\text{loại})$$

$$\text{với } t = 1 \text{ thì } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = k2\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{với } t = \sqrt{3} - 2 \text{ thì } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}} = \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \varphi + m2\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \pi - \varphi + m2\pi, m \in \mathbb{Z}, \text{ với } \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}} = \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow x = \varphi - \frac{\pi}{4} + m2\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} - \varphi + m2\pi, m \in \mathbb{Z}, \text{ với } \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}} = \sin \varphi$$

Bài 108 : Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x$ (*)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$$

$$\text{Lúc đó } (*) \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Thì } t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \text{ với } |t| \leq \sqrt{2} \text{ và } t^2 \neq 1$$

$$(*) \text{ thành } \sqrt{2}t = \frac{2}{t^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^3 - \sqrt{2}t - 2 = 0$$

(Hiển nhiên $t = \pm 1$ không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(\sqrt{2}t^2 + 2t + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t^2 + \sqrt{2}t + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 109: Giải phương trình $3(\cot gx - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2(*)$

Với điều kiện $\sin 2x \neq 0$, nhân 2 vế phương trình cho $\sin x \cos x \neq 0$ thì :

$$(*) \Leftrightarrow 3 \cos^2 x (1 - \sin x) - 5 \sin^2 x (1 - \cos x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos^2 x (1 - \sin x) - 5 \sin^2 x (1 - \cos x) = 5 \sin x \cos x - 3 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos x [\cos x (1 - \sin x) + \sin x] - 5 \sin x [\sin x (1 - \cos x) + \cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos x (\cos x - \sin x \cos x + \sin x) - 5 \sin x (\sin x - \sin x \cos x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0 \quad (1) \\ 3 \cos x - 5 \sin x = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(**Ghi chú:** $A.B + A.C = A.D \Leftrightarrow A = 0$ hay $B + C = D$)

$$\text{Giải (1) Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Thì } t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \text{ với điều kiện : } |t| \leq \sqrt{2} \text{ và } t \neq \pm 1$$

$$(1) \text{ thành : } t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{2} \text{ (loại do } |t| \leq \sqrt{2}) \\ t = 1 - \sqrt{2} \text{ (nhận so với điều kiện)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} = \sin \alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \alpha + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3}{5} = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow x = \beta + h\pi, h \in \mathbb{Z} \quad (\text{với } 0 < \beta < \pi)$$

Bài 110 : Giải phương trình

$$3\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + \frac{3(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = 8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) (*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

$$\text{Lúc đó : } (*) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x (3\operatorname{tg}^2 x - 1) + 3(1 + \sin x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 4 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]$$

$$= 4(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x (3\operatorname{tg}^2 x - 1) + (1 + \sin x) [3(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg} x + 1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\operatorname{tg}^2 x - 1)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\operatorname{tg}^2 x = 1 & (1) \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\bullet \text{Giải (2) đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

$$(2) \text{ thành : } t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \sqrt{2} & (\text{loại do điều kiện } |t| \leq \sqrt{2}) \\ t = -1 + \sqrt{2} & (\text{nhận so với điều kiện}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi - \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} - \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Bài 111 : Giải phương trình $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - (\sin x - \cos x) + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \text{ hay } 2(1 + \sin x \cos x) - 1 + (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0(1) \\ \sin x + \cos x + \sin 2x + 1 = 0(2) \end{cases}$$

$$\bullet(1) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{xét}(2) \text{ đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos x \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Với điều kiện : } |t| \leq \sqrt{2}$$

$$t^2 = 1 + \sin 2x$$

$$\text{Vậy (2) thành } t + (t^2 - 1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -1$$

$$\text{Khi } t = 0 \text{ thì } \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Khi } t = -1 \text{ thì } \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 112 : Giải phương trình

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x (*)$$

Ta có : (*)

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^3 x - \cos^3 x) + (\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) = 0 \text{ hay } 1 + (\sin x + \cos x) + (1 + \sin x \cdot \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0(1) \\ 2(\sin x + \cos x) + \sin x \cos x + 2 = 0(2) \end{cases}$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Xét (2) : đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

Thì $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

(2) thành $2t + \frac{t^2 - 1}{2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1 \vee t = -3$ (loại)

khi $t = -1$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Bài 113 : Giải phương trình $\operatorname{tg}^2 x (1 - \sin^3 x) + \cos^3 x - 1 = 0 (*)$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (1 - \sin^3 x) + \cos^3 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 - \sin^3 x) - (1 - \cos^3 x)(1 - \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x) = 0$

hay $(1 + \cos x)(1 + \sin x + \sin^2 x) - (1 + \cos x + \cos^2 x)(1 + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \text{ (nhận do điều kiện)} \\ \sin x = 1 \text{ (loại do điều kiện)} \\ \sin^2 x + \sin^2 x \cos x - \cos^2 x - \sin x \cos^2 x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin^2 x - \cos^2 x + \sin x \cos x (\sin x - \cos x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x - \cos x = 0 \text{ hay } \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \vee \operatorname{tg} x = 1 \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0 \end{cases}$

xét pt $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0$

đặt

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos x \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(\text{điều kiện } |t| \leq \sqrt{2} \text{ và } t \neq \pm 1 \right)$$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$$

$$\text{Ta được phương trình } t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ t = -1 + \sqrt{2} \text{ (nhận so với đk)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \cos \varphi$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 114 : Cho phương trình $m(\sin x + \cos x + 1) = 1 + \sin 2x (*)$

Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \text{ điều kiện } |t| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Thì } t^2 = 1 + \sin 2x$$

$$\text{Vậy } (*) \text{ thành : } m(t+1) = t^2$$

$$\text{Nếu } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ thì } \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Do đó } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\text{ta có } m(t+1) = t^2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{t^2}{t+1} \text{ (do } t = -1 \text{ không là nghiệm của phương trình)}$$

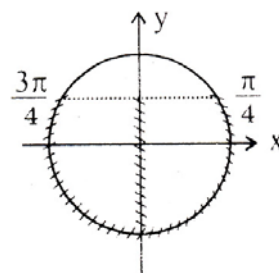
$$\text{Xét } y = \frac{t^2}{t+1} \text{ trên } [1, \sqrt{2}]$$

$$\text{Thì } y' = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0 \forall t \in [1, \sqrt{2}]$$

$$\text{Vậy } y \text{ tăng trên } [1, \sqrt{2}]$$

$$\text{Vậy } (*) \text{ có nghiệm trên } \left[1, \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow y(1) \leq m \leq y(\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 2(\sqrt{2} - 1)$$



Bài 115 : Cho phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = m \sin x \cos x (*)$

a/ Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$

b/ Tìm m để $(*)$ có nghiệm

Ta có : $(*) \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x) = m \sin x \cos x$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos x \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$

Với điều kiện $(|t| \leq \sqrt{2})$

Thì $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

Vậy $(*)$ thành $t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2} \right) = m \left(\frac{t^2 - 1}{2} \right)$

$\Leftrightarrow t(3 - t^2) = m(t^2 - 1)$

a/ Khi $m = \sqrt{2}$ ta có phương trình

$t(3 - t^2) = \sqrt{2}(t^2 - 1)$

$\Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hay $t = -\sqrt{2} + 1$ hay $t = -\sqrt{2} - 1$ (loại)

Vậy • $\cos x \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

• $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \cos \alpha$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b/ Xét phương trình $t(3 - t^2) = k(t^2 - 1) (**)$

Do $t = \pm 1$ không là nghiệm của $(**)$ nên

$(**) \Leftrightarrow m = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1}$

Xét $y = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1} (C)$ trên $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{\pm 1\}$

Ta có $y' = \frac{-t^4 - 3}{(t^2 - 1)^2} < 0 \forall t = \pm 1$

suy ra y giảm trên $(-1, 1)$ và

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$

Do đó trên $(-1, 1) \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{\pm 1\}$ ta có

(d) $y = m$ cắt (C) $y = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1}$ với $\forall m \in \mathbb{R}$

Vậy $(*)$ có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$

Bài 116 : Cho phương trình

$$m(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) = 0 (*)$$

a/ Giải phương trình khi $m = \frac{1}{2}$

b/ Tìm m để $(*)$ có nghiệm trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Với điều kiện $\sin 2x \neq 0$ ta có

$$(*) \Leftrightarrow m(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow m \sin 2x (\sin x + \cos x) + \sin 2x + (1 + \cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow m \sin 2x (\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 + \cos x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow m \sin 2x (\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 + \sin x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 (1) \\ m \sin 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0 (2) \end{cases}$$

Xét (2) đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Thì $t^2 = 1 + \sin 2x$

Do $\sin 2x \neq 0$ nên $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$

Vậy $(*)$ thành : $\begin{cases} t = 0 \\ m(t^2 - 1) + t + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (nhận so điều kiện)} \\ m(t - 1) + 1 = 0 \quad (\text{do } t \neq -1) \end{cases}$$

a/ Khi $m = \frac{1}{2}$ thì ta được :

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \text{ (loại do điều kiện)} \end{cases}$$

Vậy $\sin x + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1$$

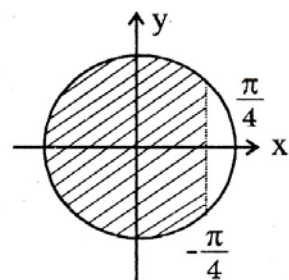
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b/ Ta có : $0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$

Lúc đó

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow 1 < t \leq \sqrt{2}$$

Do $t = 0 \notin (1, \sqrt{2}]$



Nên ta xét phương trình : $m(t-1)+1=0(**)$

$$(**) \Leftrightarrow mt = m-1$$

$$\Leftrightarrow t = 1 - \frac{1}{m} \quad (\text{do } m = 0 \text{ thì } (**) \text{ vô nghiệm})$$

$$\text{Do đó : yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow 1 < 1 - \frac{1}{m} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{m} > 0 \\ 1 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \leq -\sqrt{2}-1$$

Bài 117 : Cho $f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$

a/ Giải phương trình $f(x) = 0$ khi $m = -3$

b/ Tính theo m giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$

Tìm m cho $[f(x)]^2 \leq 36 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{điều kiện } |t| \leq \sqrt{2})$$

$$\text{Thì } t^2 = 1 + \sin 2x$$

$$\text{Và } \cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - (t^2 - 1)^2 = -t^4 + 2t^2$$

$$\text{Vậy } f(x) \text{ thành } g(t) = -t^4 + 2t^2 + 2t^3 - 3(t^2 - 1) + m$$

a/ Khi $m = -3$ thì $g(t) = 0$

$$\Leftrightarrow -t^2(t^2 - 2t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1$$

vậy khi $m = -3$ thì $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ hay } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ hay } x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b/ Ta có } g'(t) = -4t^3 + 6t^2 - 2t = -2t(2t^2 - 3t + 1)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} g'(t) = 0 \\ t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{cases} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1 \vee t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có : } g(0) = 3 + m = g(1), \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{47}{16} + m$$

$$g(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 3 + m, \quad g(-\sqrt{2}) = m - 3 - 4\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy : } \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Max}} f(x) = \underset{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}{\text{Max}} g(t) = m + 3$$

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Min}} f(x) = \underset{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}{\text{Min}} g(t) = m - 3 - 4\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó : } [f(x)]^2 \leq 36, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -6 \leq f(x) \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underset{\mathbb{R}}{\text{Max}} f(x) \leq 6 \\ \underset{\mathbb{R}}{\text{Min}} f(x) \geq -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 \leq 6 \\ m - 3 - 4\sqrt{2} \geq -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 3 \leq m \leq 3$$

Cách khác : Ta có $g(t) = -t^2(t^2 - 2t + 1) + 3 + m = -[t(t-1)]^2 + 3 + m$

Đặt $u = t^2 - t$

Khi $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ thì $u \in \left[-\frac{1}{4}, 2 + \sqrt{2}\right] = D$

Vậy $g(t) = h(u) = -u^2 + 3 + m$

$$\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}} f(x) = \underset{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}{\text{Max}} g(t) = \underset{u \in D}{\text{Max}} h(u) = m + 3$$

$$\underset{\mathbb{R}}{\text{Min}} f(x) = \underset{t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}{\text{Min}} g(t) = \underset{u \in D}{\text{Min}} h(u) = m - 3 - 4\sqrt{2}$$

Chú ý 1 : Phương trình giả đối xứng

$$a(\sin x - \cos x) + b(\sin x \cos x) = 0$$

đặt $t = \sin x - \cos x$

thì $t = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$ thì $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x$

Bài 118 : Giải phương trình $2\sin x + \cot gx = 2\sin 2x + 1 (*)$

Điều kiện : $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow 2\sin x + \frac{\cos x}{\sin x} = 4\sin x \cos x + 1$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x \cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - \cos x(4\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) - \cos x(2\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \text{ hay } \sin x - \cos x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x - \sin 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

• Ta có (1) $\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ (nhận do $\sin x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

• Xét (2) Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$

Thì $t^2 = 1 - \sin 2x$

Vậy (2) thành : $t - (1 - t^2) = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

Do đó : $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (nhận do $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$)

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{2}} = \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi + \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{4} - \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Bài 119 : Giải phương trình

$$\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x) (*)$$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[2(2 - \cos x) + (\sin x + \cos x)] - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[\sin x - \cos x + 4] - 5 = 0$$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

(*) thành : $t(t + 4) - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -5 \text{ (loại)}$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 120 : Giải phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$ (*)

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \text{ hay } 1 - \sin x \cos x = \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x - \sin x \cos x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có : (1)} \Leftrightarrow \tan x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Xét (2) đặt } t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Với điều kiện } |t| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Thì } t^2 = 1 - 2\sin x \cos x$$

$$(2) \text{ thành } t - \frac{1-t^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1$$

$$\text{vậy (2)} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Bài 121 : Cho phương trình $\cos^3 x - \sin^3 x = m$ (1)

a/ Giải phương trình (1) khi $m = 1$ bằng cách đặt ẩn phụ $t = \cos x - \sin x$

b/ Tìm m sao cho (1) có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) = m$$

$$\text{Đặt } t = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Với điều kiện } |t| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Thì } t^2 = 1 - 2\sin x \cos x$$

$$\text{Vậy (1) thành : } t\left(1 + \frac{1-t^2}{2}\right) = m$$

$$\Leftrightarrow t(3 - t^2) = 2m \quad (2)$$

a/ Khi $m = 1$ thì (2) thành $t^3 - 3t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2 (\text{loại})$$

$$\text{Vậy } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b/ Nếu $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ thì $0 \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

$$\text{nên } 0 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq t = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

nhận xét rằng với mỗi t tìm được trên $[0, \sqrt{2}]$

$$\text{ta tìm duy nhất một } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{xét } f(t) = -t^3 + 3t \text{ trên } [0, \sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 3$$

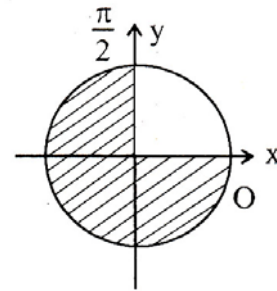
t	-1			0	1	$\sqrt{2}$	
$f'(t)$	-	0	+	+	0	-	-
$f(t)$				0	2		$\sqrt{2}$

$$\text{vậy (1) có đúng hai nghiệm } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow (d) y = 2m \text{ cắt (C) } y = -t^3 + 3t \text{ trên } [0, \sqrt{2}] \text{ tại 2 điểm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2m < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$$



Bài 122 : Cho phương trình

$$2 \cos 2x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = m(\sin x + \cos x) (*)$$

a/ Giải phương trình khi $m = 2$

b/ Tìm m để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{Ta có : } (*) \Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = m(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \quad (1) \text{ hay } 2(\cos x - \sin x) + \sin x \cos x = m \quad (2)$$

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$)

Thì $t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \sin x = -\cos x$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ta có : (2) thành $2t + \frac{1-t^2}{2} = m$

$\Leftrightarrow -t^2 + 4t + 1 = 2m (**)$

a/ Khi $m = 2$ thì $(**)$ thành $t^2 - 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 3$ (loại)

vậy $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Do đó :

$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b/ Ta có $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

vậy $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow -1 \leq t \leq 1$

Do nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall k \in \mathbb{Z}$

Nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (**)$ có nghiệm trên $[-1, 1]$

Xét $y = -t^2 + 4t + 1$ thì $y' = -2t + 4 > 0 \forall t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow y$ tăng trên $[-1, 1]$

Do đó : yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow -4 = y(-1) \leq 2m \leq y(1) = 4$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$

* **Chú ý 2** : Phương trình lượng giác dạng

$a(\operatorname{tg} x \pm \cot gx) + b(\operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x) = 0$

ta đặt $t = \operatorname{tg} x \pm \cot gx$ thì $t^2 = \operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x \pm 2$

khi $t = \operatorname{tg} x + \cot gx = \frac{2}{\sin 2x}$ thì $|t| \geq 2$ (do $|\sin 2x| \leq 1$)

Bài 123 : Giải phương trình

$3\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 4\cot gx + 3\cot g^2 x + 2 = 0 (*)$

$$\text{Đặt } t = \operatorname{tg} x + \cot g x = \frac{2}{\sin 2x}$$

Với điều kiện $|t| \geq 2$

$$\text{Thì } t^2 = \operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x + 2$$

$$(*) \text{ thành : } 3(t^2 - 2) + 4t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} (\text{loại do điều kiện}) \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } t = -2 \Leftrightarrow \frac{2}{2 \sin x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 124 : Giải phương trình

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \cot g x + \cot g^2 x + \cot g^3 x = 6 (*)$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + \cot g x) + (\operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x) + (\operatorname{tg}^3 x + \cot g^3 x) = 6$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + \cot g x) + (\operatorname{tg} x + \cot g x)^2 - 2 + (\operatorname{tg} x + \cot g x)(\operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x - 1) = 6$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + \cot g x) + (\operatorname{tg} x + \cot g x)^2 + (\operatorname{tg} x + \cot g x) \left[(\operatorname{tg} x + \cot g x)^2 - 3 \right] = 8$$

$$\text{Đặt } t = \operatorname{tg} x + \cot g x = \frac{2}{\sin 2x} (\text{điều kiện } |t| \geq 2)$$

$$\text{Vậy } (*) \text{ thành : } t + t^2 + t(t^2 - 3) = 8$$

$$\Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(t^2 + 3t + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^2 + 3t + 4 = 0 (\text{vô nghiệm}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Vậy } \frac{2}{\sin 2x} = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 125 : Giải phương trình

$$\frac{2}{\sin^2 x} + 2\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 5 \cot g x + 4 = 0 (*)$$

$$\text{Cách 1 : } (*) \Leftrightarrow 2(1 + \cot g^2 x) + 2\operatorname{tg}^2 x + 5(\operatorname{tg} x + \cot g x) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x) + 5(\operatorname{tg} x + \cot g x) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2[(\operatorname{tg} x + \cot g x)^2 - 2] + 5(\operatorname{tg} x + \cot g x) + 6 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \operatorname{tg} x + \cot g x = \frac{2}{\sin 2x}, \text{ với } |t| \geq 2$$

$$\text{Ta được phương trình : } 2t^2 + 5t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -2 \vee t = -\frac{1}{2} (\text{loại})$$

$$\text{Vậy (*)} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cách 2 : Đặt $u = \operatorname{tg} x$ (với điều kiện $u \neq 0$)

$$\text{Vậy (*) thành : } 2 + \frac{2}{u^2} + 2u^2 + 5u + \frac{5}{u} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2u^4 + 5u^3 + 5u + 6u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u + 1)(2u^3 + 3u^2 + 3u + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u + 1)^2(2u^2 + u + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 (\text{nhận}) \\ 2u^2 + u + 2 = 0 (\text{vô nghiệm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy (*)} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 126 : Cho phương trình

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \cot g^2 x + m(\operatorname{tg} x + \cot g x) + 2 = 0 \quad (1)$$

a/ Giải phương trình khi $m = \frac{5}{2}$

b/ Tìm m để phương trình có nghiệm

$$\text{Ta có : (1)} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x + m(\operatorname{tg} x + \cot g x) + 3 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \operatorname{tg} x + \cot g x = \frac{2}{\sin 2x} (\text{điều kiện } |t| \geq 2)$$

$$\Rightarrow t^2 = \operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x + 2$$

$$\text{Vậy (1) thành : } t^2 + mt + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{a/ Khi } m = \frac{5}{2} \text{ ta được phương trình } 2t^2 + 5t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -2 \vee t = -\frac{1}{2} (\text{loại})$$

$$\text{Do đó } \frac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b/ **Cách 1** :

$$\text{Ta có : (2)} \Leftrightarrow mt = -1 - t^2$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{t} - t \text{ (do } t = 0 \text{ không là nghiệm của (2))}$$

$$\text{Xét } y = -\frac{1}{t} - t \text{ với } |t| \geq 2$$

$$\text{Thì } y' = \frac{1}{t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{t^2}$$

$$\text{Ta có : } y' = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

t	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	-	-	0	+	+	0	-
y	$+\infty$	$\frac{5}{2}$				$-\frac{5}{2}$	$-\infty$

Do đó (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (d) cắt (C) trên $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2} \vee m \geq \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow |m| \geq \frac{5}{2}$$

Cách 2 : Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow f(t) = t^2 + mt + 1 = 0 \text{ có nghiệm } t \text{ thỏa } |t| \geq 2$$

Nhận xét rằng do $P = 1$ nên nếu $f(t)$ có hai nghiệm t_1, t_2 (với $t_1 \leq t_2$) và có

$$\text{nghiệm thì ta có } \begin{cases} |t_1| \leq 1 \\ |t_2| \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} |t_1| \geq 1 \\ |t_2| \leq 1 \end{cases}$$

Do đó :

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow t_1 \leq -2 < t_1 < 2 \vee -2 < t_1 < 2 \leq t_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1f(-2) \leq 0 \\ 1f(2) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1f(2) \leq 0 \\ 1f(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 5 \leq 0 \\ 2m + 5 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2m + 5 > 0 \\ 2m + 5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{5}{2} \vee m \leq -\frac{5}{2}$$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình :
 - a/ $1 + \cos^3 x - \sin^3 x = \sin x$
 - b/ $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$
 - c/ $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$
 - d/ $\cot gx - \tan x = \sin x + \cos x$
 - e/ $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x - \cos x$
 - f/ $1 + \tan x = \sin x + \cos x$
 - g/ $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
 - k/ $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$
 - l/ $\frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x + 1} = 1$
 - m/ $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$
 - n/ $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$
 - o/ $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + 2\cos 2x = 0$
 - p/ $\sin^2 x \cos x - \cos 2x + \sin x = \cos^2 x \sin x + \cos x$
 - r/ $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$
 - s/ $\cos^2 x + \sin^3 x + \cos x = 0$
 - t/ $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$
2. Cho phương trình $\sin 2x(\sin x + \cos x) = m(1)$
 - a/ Chứng minh nếu $|m| > \sqrt{2}$ thì (1) vô nghiệm
 - b/ Giải phương trình khi $|m| = \sqrt{2}$
3. Cho phương trình $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$
 - a/ Giải phương trình khi $m = 4$
 - b/ Tìm m để phương trình có nghiệm
4. Cho phương trình : $\sin x \cos x - m(\sin x + \cos x) + 1 = 0$
 - a/ Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$
 - b/ Tìm m để phương trình có nghiệm (ĐS : $|m| \geq 1$)
5. Cho phương trình $\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x = m(\tan x + \cot x) = 1$
Tìm m để phương trình có nghiệm (ĐS : $|m| \geq 4$)

Th.S Phạm Hồng Danh
TT luyện thi ĐH CLC Vĩnh Viễn