CHƯƠNG IV:

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SIN VÀ COSIN (PHƯƠNG TRÌNH CỔ ĐIỂN)

$a\sin u + b\cos u = c\,(*).\left(a,b \in R \setminus |0|\right)$

Cách 1 : Chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$

Đặt $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ với $\alpha \in [0, 2\pi]$

Thì $(*) \Leftrightarrow \sin u\cos\alpha + \cos u\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\Leftrightarrow \sin(u+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Cách 2 :

Nếu $u = \pi + k2\pi$ là nghiệm của (*) thì :

$a\sin\pi + b\cos\pi = c \Leftrightarrow -b = c$

Nếu $u \neq \pi + k2\pi$ đặt $t = tg\dfrac{u}{2}$ thì (*) thành :

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

$\Leftrightarrow (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0\ (1)(\text{với } b + c \neq 0)$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = a^2 - (c+b)(c-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 \geq c^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

Giải phương trình (1) tìm được t. Từ $t = tg\dfrac{u}{2}$ ta tìm được u.

<u>Bài 87</u> : Tìm $x \in \left(\dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{6\pi}{7}\right)$ thỏa phương trình : $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}\ (*)$

Chia hai vế của (*) cho 2 ta được :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ \text{ hay } \ 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + h2\pi, \quad (k, h \in Z)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \text{ hay } x = \frac{11\pi}{84} + \frac{h2\pi}{7},\ k, h \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{6\pi}{7}\right)$ nên ta phải có :

$$\frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \text{ hay } \frac{2\pi}{5} < \frac{11\pi}{84} + \frac{h2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{5}{84} + \frac{k2}{7} < \frac{6}{7} \text{ hay } \frac{2}{5} < \frac{11}{84} + \frac{h2}{7} < \frac{6}{7} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

Suy ra $k = 2,\ h = 1, 2$

Vậy $x = \frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{53}{84}\pi \vee x = \frac{11\pi}{84} + \frac{2\pi}{7} = \frac{35}{84}\pi$

$$\vee x = \frac{11\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{59}{84}\pi$$

Bài 88 : Giải phương trình

$$3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x \,(*)$$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \left(3\sin 3x - 4\sin^3 3x\right) - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hay } 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \text{ hay } x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9},\ k \in \mathbb{Z}$$

Bài 89 : Giải phương trình

$$\operatorname{tg}x - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0\,(*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x - \cos 2x + 4\cos x - \frac{2}{\cos x} = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin 2x\cos x - \cos x\cos 2x + 4\cos^2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(1 - 2\cos^2 x\right) - \cos x\cos 2x + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x\cos 2x - \cos x\cos 2x + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ hay } -\sin x - \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \left(\text{nhận do } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 0 \text{ thì } \cos x \neq 0\right) \\ \sin x + \cos x = 2 \quad \left(\text{vô nghiệm vì } 1^2 + 1^2 < 2^2\right) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 90 : Giải phương trình $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}(*)$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 4(1-\cos 2x)\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow -4\cos 2x\cos x = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow -2(\cos 3x + \cos x) = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee 3x = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

Nhận so vớiđiều kiện $\sin 2x \neq 0$

Cách khác :

$(*) \Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

(hiển nhiên cosx = 0 hay sinx = 0 không là nghiệm của pt này)

$\Leftrightarrow 8(1-\cos^2 x)\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 8\cos x - 8\cos^3 x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 6\cos x - 8\cos^3 x = \sqrt{3}\sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee 3x = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

Bài 91 : Giải phương trình

$$9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8(*)$$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + (1 - 2\sin^2 x) = 8$

$\Leftrightarrow 6\cos x - 6\sin x\cos x - 2\sin^2 x + 9\sin x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos x(1-\sin x) - 2(\sin x - 1)\left(\sin x - \dfrac{7}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $6\cos x + 2\left(\sin x - \dfrac{7}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ 6\cos x + 2\sin x = 7 \left(\text{vô nghiệm do } 6^2 + 2^2 < 7^2\right) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 92 : Giải phương trình: $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x\,(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 1 + \sin x - 4\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x + 4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right) + 4\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)\left(\cos x + \dfrac{3}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \dfrac{1}{2} = 0$ hay $2\sin x + 4\cos x + 6 = 0 \left(\text{vô nghiệm do } 2^2 + 4^2 < 6^2\right)$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

Bài 93 : Giải phương trình

$$2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4\,(*)$$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 4\sin x\cos x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 7\sin x + 2\cos x - 4$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + 2\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right)(\sin x - 3)$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0$ hay $2\cos x + \sin x - 3 = 0$ $\left(\text{vô nghiệm vì } 1^2 + 2^2 < 3^2\right)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 94 : Giải phương trình

$$\sin 2x - \cos 2x = 3\sin x + \cos x - 2\,(*)$$

Ta có (*) $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 3\sin x + \cos x - 2$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0$ hay $\cos x + \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ hay $\sqrt{2}\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ hay $x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 95</u> : Giải phương trình

$$\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)(*)$$

Đặt $t = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$, Điều kiện $-\sqrt{a^2 + b^2} = -2 \le t \le 2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

Thì $t = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Vậy (*) thành:

$t^2 - 5 = \frac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$ (loại) $\vee\ t = -2$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$

<u>Bài 96</u> : Giải phương trình $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0(*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(\cos x + 1) - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x)(1 + \cos x) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $2(1 + \sin x)(1 + \cos x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $1 + 2\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1$ hay $\sin x + \cos x = 0$ hay $\sin x + \cos x + 2 = 0$ (vô nghiệm do: $1^2 + 1^2 < 2^2$)

$\Leftrightarrow \sin x = 1$ hay $\mathrm{tg}x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hay $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in ¢$

<u>Bài 97</u> : Giải phương trình $1 + \cot g2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}(*)$

Điều kiện : $\sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow \cos 2x \ne \pm 1$

Ta có (*)

$\Leftrightarrow 1 + \cot g2x = \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos^2 2x} = \frac{1}{1 + \cos 2x}$

$\Leftrightarrow \cot g2x = \frac{1}{1 + \cos 2x} - 1$

$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{-\cos 2x}{1 + \cos 2x}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \left(\text{nhận do} \neq \pm 1\right) \\ \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{-1}{1+\cos 2x} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee 1 + \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \sin 2x + \cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \vee 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in ¢$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x == -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee 2x = \pi + k2\pi\left(\text{loại}\right),\ k \in ¢$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in ¢$$

Bài 98 : Giải phương trình $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \sqrt{3}\sin 4x = 2\left(*\right)$

Ta có : (*)

$$\Leftrightarrow 4\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right] + \sqrt{3}\sin 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow 4\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right] + \sqrt{3}\sin 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi \text{ hay } 4x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in ¢$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ hay } x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in ¢$$

Cách khác :

$$(*) \Leftrightarrow 2\left(1 - \sin^2 2x\right) + \sqrt{3}\sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cot g2x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in ¢$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in ¢$$

Bài 99 : Giải phương trình $1+\sin^3 2x+\cos^3 2x=\frac{1}{2}\sin 4x\,(*)$

Ta có $(*)\Leftrightarrow 1+(\sin 2x+\cos 2x)(1-\sin 2x\cos 2x)=\frac{1}{2}\sin 4x$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin 4x+(\sin 2x+\cos 2x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 4x\right)=0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin 4x=0$ hay $1+\sin 2x+\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=2\,(\text{loại})\\ \sin 2x+\cos 2x=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})=-1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in Z)$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in ¢$$

Bài 100 : Giải phương trình

$$tgx-3\cot gx=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)(*)$$

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0$

Lúc đó : (*) $\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-3\frac{\cos x}{\sin x}=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-3\cos^2 x=4\sin x\cos x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\sqrt{3}\cos x\\ \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=-\sqrt{3}=tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\vee x-\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi\vee x-\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi,\ k\in Z$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}-k2\pi \vee x=\frac{4\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}, k\in ¢$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=\frac{4\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}(\text{nhận do } \sin 2x\neq 0)$$

Bài 101 : Giải phương trình $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x-\cos x\,(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \sin^3 x-\sin x+\cos^3 x+\cos x=0$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin^2 x-1)+\cos^3 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x\cos^2 x+\cos^3 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \text{ hay } -\sin x\cos x+\cos^2 x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ -\sin 2x+\cos 2x=-3(\text{vô nghiệm do } 1+1<9)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$$

Bài 102 : Giải phương trình $\cos^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2+\frac{1}{4}\left[1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\sin 2x=-1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$$

Bài 103 : Giải phương trình $4\sin^3 x.\cos 3x+4\cos^3 x.\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3(*)$

Ta có : (*)

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x(4\cos^3 x-3\cos x)+4\cos^3 x(3\sin x-4\sin^3 x)+3\sqrt{3}\cos 4x=3$$

$$\Leftrightarrow -12\sin^3 x\cos x+12\sin x\cos^3 x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x(-\sin^2 x+\cos^2 x)+\sqrt{3}\cos 4x=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x+\sqrt{3}\cos 4x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x+\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos 4x=1$$

$\Leftrightarrow \sin 4x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos 4x=\cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 4x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee 4x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ k\in ¢$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in ¢$

Bài 104 : Cho phương trình : $2\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x=m\,(*)$

a/ Tìm m sao cho phương trình có nghiệm

b/ Giải phương trình khi m = -1

Ta có : (*) $\Leftrightarrow (1-\cos 2x)-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=m$

$\Leftrightarrow \sin 2x+3\cos 2x=-2m+1$

a/ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$

$\Leftrightarrow 1+9\ge(1-2m)^2$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m-9\le 0$

$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{10}}{2}\le m\le\frac{1+\sqrt{10}}{2}$

b/ Khi m = -1 ta được phương trình

$\sin 2x+3\cos 2x=3\ (1)$

• Nếu $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ thì $\sin 2x=0$ và $\cos 2x=-1$ nên phương trình (1) không thỏa.

• Nếu $x\ne(2k+1)\frac{\pi}{2}$ thì $\cos x\ne 0$, đặt $t=tgx$

(1) thành $\frac{2t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}=3$

$\Leftrightarrow 2t+3(1-t^2)=3(t^2+1)$

$\Leftrightarrow 6t^2-2t=0$

$\Leftrightarrow t=0\vee t=3$

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ $tgx=0$ hay $tgx=3=tg\varphi \Leftrightarrow x=k\pi$ hay $x=\varphi+k\pi,\ k\in ¢$

Bài 105 : Cho phương trình $\frac{5+4\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\sin x}=\frac{6tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\,(*)$

a/ Giải phương trình khi $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

b/ Tìm α để phương trình (*) có nghiệm

Ta có : $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$

$\frac{6tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{6\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos^2\alpha=3\sin 2\alpha$ với $\cos\alpha\neq 0$

Vậy : $(*)\Leftrightarrow\frac{5-4\cos x}{\sin x}=3\sin 2\alpha$ (điều kiện $\sin x\neq 0$ và $\cos\alpha\neq 0$)

$\Leftrightarrow 3\sin 2\alpha\sin x+4\cos x=5$

a/ Khi $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ ta được phương trình

$-3\sin x+4\cos x=5(1)$ (Hiển nhiên sin x = 0 không là nghiệm của (1))

$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=1$

Đặt $\cos\varphi=-\frac{3}{5}$ và $\sin\varphi=\frac{4}{5}$ với $0<\varphi<2\pi$

Ta có pt (1) thành :

$\sin(\varphi+x)=1$

$\Leftrightarrow \varphi+x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

$\Leftrightarrow x=-\varphi+\frac{\pi}{2}+k2\pi$

b/ (**) có nghiệm $\Leftrightarrow (3\sin 2\alpha)^2+16\geq 25$ và $\cos\alpha\neq 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha\geq 1$ và $\cos\alpha\neq 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha=1$

$\Leftrightarrow \cos 2\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in ¢$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a/ $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos x=3+\cos 2x$

b/ $(2\cos x-1)(\sin x+\cos x)=1$

c/ $2\cos 2x=\sqrt{6}(\cos x-\sin x)$

d/ $3\sin x=3-\sqrt{3}\cos x$

e/ $2\cos 3x+\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$

f/ $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\cos x+\sin x$

g/ $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\frac{3}{\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}$

h/ $\sin x+\cos x=\cos 2x$

k/ $4\sin^3 x-1=3\sin x-\sqrt{3}\cos 3x$

i / $3\cos x+4\sin x+\frac{6}{3\cos x+4\sin x+1}=6$

j/ $\cos 7x\cos 5x-\sqrt{3}\sin 2x=1-\sin 7x\sin 5x$

m/ $4\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2$

p/ $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$

q/ $4\sin 2x-3\cos 2x=3\left(4\sin x-1\right)$

r/ $tgx-\sin 2x-\cos 2x=-4\cos x+\dfrac{2}{\cos x}$

s/ $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-1}=1$

2. Cho phương trình cosx + msinx = 2 (1)

a/ Giải phương trình $m=\sqrt{3}$

b/ Tìm các giá trị m để (1) có nghiệm (ĐS : $|m|\ge\sqrt{3}$)

3. Cho phương trình :

$$\frac{m\sin x-2}{m-2\cos x}=\frac{m\cos x-2}{m-2\sin x}\quad(1)$$

a/ Giải phương trình (1) khi m = 1

b/ Khi $m\ne 0$ và $m\ne\sqrt{2}$ thì (1) có bao nhiêu nghiệm trên $\left[20\pi,30\pi\right]$?

(ĐS : 10 nghiệm)

4. Cho phương trình

$$\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=a\quad(1)$$

a/ Giải (1)khi $a=\dfrac{1}{3}$

b/ Tìm a để (1) có nghiệm

Th.S Phạm Hồng Danh
TT Luyện thi đại học CLC Vĩnh Viễn