LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG III: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

$$a\sin^2 u + b\sin u + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$
$$a\cos^2 u + b\cos u + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$
$$atg^2u + btgu = c = 0 \qquad (a \neq 0)$$
$$a\cot g^2u + b\cot gu + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

Cách giải:
Đặt : $t = \sin u$ hay $t = \cos u$ với $|t| \leq 1$

$t = tgu$ (điều kiện $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

$t = \cot gu$ (điều kiện $u \neq k\pi$)

Các phương trình trên thành: $at^2 + bt + c = 0$
Giải phương trình tìm được t, so với điều kiện để nhận nghiệm t.
Từ đó giải phương trình lượng giác cơ bản tìm được u.

Bài 56: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2002)
Tìm các nghiệm trên $(0, 2\pi)$ của phương trình

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x\,(*)$$

Điều kiện: $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$

Ta có: $\sin 3x + \cos 3x = \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)$

$= -3(\cos x - \sin x) + 4\left(\cos^3 x - \sin^3 x\right)$

$= (\cos x - \sin x)\left[-3 + 4\left(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x\right)\right]$

$= (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x)$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 5\left[\sin x + (\cos x - \sin x)\right] = 3 + \left(2\cos^2 x - 1\right)$

$\left(\text{do } \sin 2x \neq -\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = 2\,(\text{loại})\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ (nhận do $\sin 2x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq -\dfrac{1}{2}$)

Do $x \in (0, 2\pi)$ nên $x = \dfrac{\pi}{3} \vee x = \dfrac{5\pi}{3}$

Bài 57: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2005)
Giải phương trình: $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0\,(*)$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos 6x}{2}.\cos 2x - \dfrac{1+\cos 2x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6x.\cos 2x - 1 = 0$ (**)

Cách 1: (**) $\Leftrightarrow \left(4\cos^3 2x - 3\cos 2x\right)\cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 2x = 1 \\ \cos^2 2x = -\dfrac{1}{4}\,(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$

Cách 2: (**) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 1 \\ \cos 4x = -\dfrac{3}{2}\,(\text{loại})\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$

Cách 3: phương trình lượng giác không mẫu mực:

$$(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x = \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = \cos 2x = -1\end{array}\right.$$

Cách 4: $\cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x = 2$

$\Leftrightarrow \cos 8x = \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 1$

Bài 58: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D, năm 2005)
Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$

Ta có:
(*)

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\left[-\cos 4x + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 2x\right) + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2\left(\text{loại}\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 59: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B, năm 2004)
Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\operatorname{tg}^2 x \quad (*)$

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3\left(1 - \sin x\right)\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3\left(1 - \sin x\right)\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \frac{3\sin^2 x}{1 + \sin x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\left(\text{nhận do } \sin x \neq \pm 1\right) \\ \sin x = -2\left(\text{vô nghiệm}\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\left(k \in Z\right)$$

Bài 60: Giải phương trình: $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}(*)$

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 2\left(\sin 3x - \cos 3x\right) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow 2\left[3(\sin x+\cos x)-4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)\right]=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)\left[3-4\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left[-2+8\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left[4\sin 2x-\frac{2}{\sin 2x}-2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 4\sin^2 2x-2\sin 2x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=-1\\ \sin 2x=1\vee \sin 2x=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.\left(\text{nhận so với điều kiện}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\vee 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\vee 2x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee 2x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\vee x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\vee x=\frac{7\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Bài 61: Giải phương trình: $\dfrac{\cos x\left(2\sin x+3\sqrt{2}\right)-2\cos^2 x-1}{1+\sin 2x}=1 \quad (*)$

Điều kiện: $\sin 2x\neq -1\Leftrightarrow x\neq -\dfrac{\pi}{4}+m\pi$

Lúc đó:

$(*)\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+3\sqrt{2}\cos x-2\cos^2 x-1=1+\sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\sqrt{2}\cos x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay $\cos x=\sqrt{2}$ (vô nghiệm)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k'2\pi\left(\text{loại do điều kiện}\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$$

Bài 62: Giải phương trình:

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}(*)$$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos x(\cos 2x+\cos x)+\dfrac{1}{2}\sin x(\cos 2x-\cos x)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x.\cos 2x+\cos^2 x+\sin x\cos 2x-\sin x\cos x=1$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x+\sin x)=1-\cos^2 x+\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x+\sin x)=\sin x(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - \sin x) = 0 (**)$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\left(1 - 2\sin^2 x - \sin x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\sin x \\ 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -1 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \qquad (k \in Z)$

<u>Cách khác</u>: (**) $\Leftrightarrow \text{tg}x = -1 \vee \cos 2x = \sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

<u>Bài 63</u>: Giải phương trình: $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x (*)$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 6\sqrt{2}\sin x \cos x - 8\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sqrt{2}\sin x - 4\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \sqrt{2}\,(\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in Z)$

<u>Bài 64</u>: Giải phương trình:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)(*)$$

(*) $\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos\dfrac{\pi}{4} + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \left(4 + \sqrt{2}\right)\sin x - 2 - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x - \left(4 + \sqrt{2}\right)\sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\left(2\sqrt{2}+1\right)\sin x+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{2}\,(\text{loại})\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ hay } x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

<u>Bài 65</u>: Giải phương trình : $3\cot g^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=\left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x\,(*)$

Điều kiện: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow \cos x\neq \pm 1$

Chia hai vế (*) cho $\sin^2 x$ ta được:

$(*) \Leftrightarrow 3\dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}+2\sqrt{2}=\left(2+3\sqrt{2}\right)\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ và $\sin x\neq 0$

Đặt $t=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ ta được phương trình:

$$3t^2-\left(2+3\sqrt{2}\right)t+2\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow t=\sqrt{2}\vee t=\frac{2}{3}$$

* Với $t=\dfrac{2}{3}$ ta có: $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow 3\cos x=2\left(1-\cos^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-2\,(\text{loại})\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\left(\text{nhận do }\cos x\neq\pm 1\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in Z)$$

* Với $t=\sqrt{2}$ ta có: $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \cos x=\sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\sqrt{2}\,(\text{loại})\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\text{nhận do }\cos x\neq\pm 1\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

<u>Bài 66</u>: Giải phương trình: $\dfrac{4\sin^2 2x+6\sin^2 x-9-3\cos 2x}{\cos x}=0\,(*)$

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Lúc đó:

$(*) \Leftrightarrow 4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(1-\cos^2 2x\right) + 3\left(1-\cos 2x\right) - 9 - 3\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x + 6\cos 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \vee \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = -1 \vee 2\cos^2 x - 1 = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \left(\text{loại do điều kiện}\right) \\ \cos x = \pm\dfrac{1}{2} \left(\text{nhận do } \cos x \neq 0\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \left(k \in Z\right)$

<u>Bài 67</u>: Cho $f\left(x\right) = \sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \dfrac{2}{5}\sin 5x$

Giải phương trình: $f'\left(x\right) = 0$

Ta có: $f'\left(x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x + \cos 3x + 2\cos 5x = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos x + \cos 5x\right) + \left(\cos 3x + \cos 5x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos 2x + 2\cos 4x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\cos 2x + \left(2\cos^2 2x - 1\right)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\left(4\cos^2 x - 3\right)\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1\right]\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[2\left(1+\cos 2x\right) - 3\right]\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \vee \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8} = \cos\alpha \vee \cos 2x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{8} = \cos\beta \vee \cos x = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\alpha}{2} + k\pi \vee x = \pm\dfrac{\beta}{2} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in Z\right)$

Bài 68: Giải phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x\,(*)$

Ta có:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$= \left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x$$
$$= 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x$$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow 16\left(1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x\right) = 17\left(1 - \sin^2 2x\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^4 2x + \sin^2 2x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = -1\,(\text{loại}) \\ \sin^2 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{8}, (k \in Z)$$

Bài 69: Giải phương trình: $\sin\frac{5x}{2} = 5\cos^3 x.\sin\frac{x}{2}\,(*)$

Nhận xét thấy: $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \cos x = -1$

Thay vào (*) ta được:

$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 5k\pi\right) = -5.\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, không thỏa $\forall k$

Do $\cos\frac{x}{2}$ không là nghiệm của (*) nên:

$$(*) \Leftrightarrow \sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2} = 5\cos^2 x.\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \text{ và } \cos\frac{x}{2} \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin 2x) = \frac{5}{2}\cos^3 x.\sin x \text{ và } \cos\frac{x}{2} \neq 0$$
$$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x\cos x = 5\cos^3 x.\sin x \text{ và } \cos\frac{x}{2} \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{x}{2} \neq 0 \\ 3 - 4\sin^2 x + 2\cos x = 5\cos^3 x \vee \sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} \neq 0 \\ 5\cos^3 x - 4\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0 \vee \sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ (\cos x - 1)\left(5\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0 \vee \sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{10} = \cos\alpha \\ \cos x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{10} = \cos\beta \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = k2\pi$ hay $x = \pm\alpha + k2\pi$ hay $x = \pm\beta + k2\pi, (k \in Z)$

<u>Bài 70</u>: Giải phương trình: $\sin 2x(\cot gx + tg2x) = 4\cos^2 x\,(*)$

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0$ và $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \wedge \cos 2x \neq 1$

Ta có: $\cot gx + tg2x = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$$= \frac{\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x}{\sin x \cos 2x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x \cos 2x}$$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x\left(\dfrac{\cos x}{\sin x \cos 2x}\right) = 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 x}{\cos 2x} = 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1) = 2\cos 2x(\cos 2x + 1)$

$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1) = 0$ hay $1 = 2\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \vee \cos 2x = \dfrac{1}{2}$ (nhận do $\cos 2x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 1$)

$\Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \vee 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 71</u>: Giải phương trình: $2\cos^2\dfrac{6x}{5} + 1 = 3\cos\dfrac{8x}{5}\,(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \left(1+\cos\frac{12x}{5}\right)+1=3\left(2\cos^2\frac{4x}{5}-1\right)$

$$\Leftrightarrow 2+4\cos^3\frac{4x}{5}-3\cos\frac{4x}{5}=3\left(2\cos^2\frac{4x}{5}-1\right)$$

Đặt $t=\cos\frac{4}{5}x$ (điều kiện $|t|\le 1$)

Ta có phương trình :

$4t^3-3t+2=6t^2-3$

$\Leftrightarrow 4t^3-6t^2-3t+5=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(4t^2-2t-5\right)=0$

$\Leftrightarrow t=1 \vee t=\frac{1-\sqrt{21}}{4} \vee t=\frac{1+\sqrt{21}}{4}$ (loại)

Vậy

- $\cos\frac{4x}{5}=1 \Leftrightarrow \frac{4x}{5}=2k\pi$

  $\Leftrightarrow x=\frac{5k\pi}{2}\ (k\in Z)$

- $\cos\frac{4x}{5}=\frac{1-\sqrt{21}}{4}=\cos\alpha$ (với $0<\alpha<2\pi$)

  $\Leftrightarrow \frac{4x}{5}=\pm\alpha+l2\pi$

  $\Leftrightarrow x=\pm\frac{5\alpha}{4}+\frac{l5\pi}{2},\ (l\in Z)$

Bài 72 : Giải phương trình $tg^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=tgx-1\ (*)$

Đặt $t=x-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+t$

(*) thành : $tg^3t=tg\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-1=\frac{1+tgt}{1-tgt}-1$ với $\cos t\ne 0 \wedge tgt\ne 1$

$\Leftrightarrow tg^3t=\frac{2tgt}{1-tgt}$

$\Leftrightarrow tg^3t-tg^4t=2tgt$

$\Leftrightarrow tgt\left(tg^3t-tg^2t+2\right)=0$

$\Leftrightarrow tgt\left(tgt+1\right)\left(tg^2t-2tgt+2\right)=0$

$\Leftrightarrow tgt=0 \vee tgt=-1$ (nhận so điều kiện)

$\Leftrightarrow t=k\pi \vee t=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in ¢$

Vậy (*)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ hay $x = k\pi, k \in ¢$

Bài 73 : Giải phương trình $\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x \quad (*)$

Điều kiện

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq \pm 1$

Do :

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 - tgx}{1 + tgx} \cdot \frac{1 + tgx}{1 - tgx} = 1$$

Khi $\cos 2x \neq 0$ thì :

$(*) \Leftrightarrow \sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \cos^2 4x\right) = \cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 4x - \cos^2 4x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 4x = 1 \\ \cos^2 4x = -\frac{1}{2} \left(\text{vô nghiệm}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 - \sin^2 4x = 1$$

$\Leftrightarrow \sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \left(\text{do } \cos 2x \neq 0\right)$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in ¢ \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in ¢$

Bài 74 :Giải phương trình: $48 - \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x}\left(1 + \cot g2x \cot gx\right) = 0 (*)$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

Ta có :

$$1+\cot g2x\cot gx = 1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}.\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$= \frac{\sin 2x\sin x+\cos 2x\cos x}{\sin x\sin 2x}$$
$$= \frac{\cos x}{2\sin^2 x\cos x} = \frac{1}{2\sin^2 x}\left(\text{do } \cos x \neq 0\right)$$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{1}{\sin^4 x}=0$

$\Leftrightarrow 48 = \frac{1}{\cos^4 x}+\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x}$

$\Leftrightarrow 48\sin^4 x\cos^4 x = \sin^4 x+\cos^4 x$

$\Leftrightarrow 3\sin^4 2x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 3\sin^4 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = -\frac{2}{3}\left(\text{lọai}\right) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(\text{nhận do} \neq 0\right) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1-\cos 4x\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\left(k\in Z\right)$

<u>Bài 75</u> : Giải phương trình

$$\sin^8 x+\cos^8 x = 2\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right)+\frac{5}{4}\cos 2x\left(*\right)$$

Ta có : (*)

$\Leftrightarrow \left(\sin^8 x-2\sin^{10} x\right)+\left(\cos^8 x-2\cos^{10} x\right)=\frac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^8 x\left(1-2\sin^2 x\right)-\cos^8 x\left(-1+2\cos^2 x\right)=\frac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^8 x.\cos 2x-\cos^8 x\cos 2x = \frac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos 2x\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)=5\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hay $4\left(\sin^8 x - \cos^8 x\right) = 5$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hay $4\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right)\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = 5$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hay $4\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 5$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hay $-2\sin^2 2x = 1$ (Vô nghiệm)

$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

<u>Cách khác</u>: Ta có $4\left(\sin^8 x - \cos^8 x\right) = 5$ vô nghiệm

Vì $\left(\sin^8 x - \cos^8 x\right) \le 1, \forall x$ nên $4\left(\sin^8 x - \cos^8 x\right) \le 4 < 5, \forall x$

<u>Ghi chú</u> : Khi gặp phương trình lượng giác dạng R(tgx, cotgx, sin2x, cos2x, tg2x) với R hàm hữu tỷ thì đặt t = tgx

Lúc đó $tg2x = \dfrac{2t}{1-t^2}, \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

<u>Bài 76</u> : (Để thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2003)
Giải phương trình

$$\cot gx - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + tgx} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x \, (*)$$

Điều kiện : $\sin 2x \ne 0$ và $tgx \ne -1$

Đặt t = tgx thì (*) thành :

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+t} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right] - \frac{1}{2}.\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = \frac{1-t}{1+t^2} + \frac{1}{2}.\frac{2t^2}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \left(\text{do } t \ne -1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = \frac{t^2 - 2t + 1}{1+t^2} = \frac{(1-t)^2}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow (1-t)\left(1+t^2\right) = (1-t)^2 t$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - t = 0 \\ 1 + t^2 = (1-t)t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \ (\text{nhận do } t \ne -1) \\ 2t^2 - t + 1 = 0 \ (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (nhận do $\sin 2x = 1 \ne 0$)

<u>Bài 77</u> : Giải phương trình: $\sin 2x + 2tgx = 3 \ (*)$

Điều kiện : $\cos x \ne 0$

Đặt $t = tgx$ thì (*) thành :

$$\frac{2t}{1+t^2}+2t=3$$
$$\Leftrightarrow 2t+(2t-3)\left(1+t^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2t^3-3t^2+4t-3=0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2-t+3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ 2t^2-t+3=0 \ (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$$
Vậy $(*) \Leftrightarrow \text{tg}x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in Z)$

<u>Bài 78</u> : Giải phương trình
$$\cot gx-\text{tg}x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x} \ (*)$$

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

Đặt $t=\text{tg}x$ thì : $\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$ do $\sin 2x\neq 0$ nên $t\neq 0$

$(*)$ thành : $\frac{1}{t}-t+\frac{8t}{1+t^2}=\frac{1+t^2}{t}=\frac{1}{t}+t$
$$\Leftrightarrow \frac{8t}{1+t^2}=2t$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{1+t^2}=1 \ (\text{do } t\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow t^2=3 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{3} \ (\text{nhận do } t\neq 0)$$
Vậy $(*) \Leftrightarrow \text{tg}x=\text{tg}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$
$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in \mathbb{Z}$$

<u>Bài 79</u> : Giải phương trình
$$(1-\text{tg}x)(1+\sin 2x)=1+\text{tg}x \ (*)$$

Điều kiện : $\cos x\neq 0$

Đặt $=\text{tg}x$ thì $(*)$ thành :
$$(1-t)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)=1+t$$
$$\Leftrightarrow (1-t)\frac{(t+1)^2}{1+t^2}=1+t$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ \frac{(1-t)(1+t)}{1+t^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ 1-t^2=1+t^2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow t=-1 \vee t=0$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ tgx = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ hay $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 80</u> : Cho phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0 (*)$

a/ Giải phương trình khi $m = \dfrac{3}{2}$

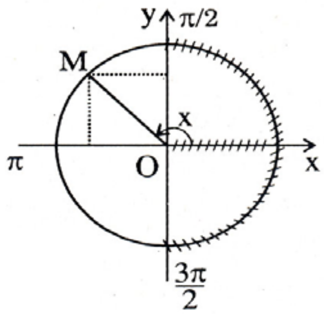
b/ Tìm m để (*) có nghiệm trên $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Ta có (*) $2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x & ([t] \le 1) \\ 2t^2 - (2m+1)t + m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x & ([t] \le 1) \\ t = \dfrac{1}{2} \vee t = m \end{cases}$$

a/ Khi $m = \dfrac{3}{2}$, phương trình thành



$\cos x = \dfrac{1}{2} \vee \cos x = \dfrac{3}{2}$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \pm \dfrac{\pi}{3} + k2\pi (k \in Z)$

b/ Khi $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x = t \in [-1, 0)$

Do $t = \dfrac{1}{2} \notin [-1, 0]$ nên

$(*)$ có nghiệm trên $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m \in [-1, 0)$

<u>Bài 81</u> : Cho phương trình

$$(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x (*)$$

a/ Giải (*) khi m= -2

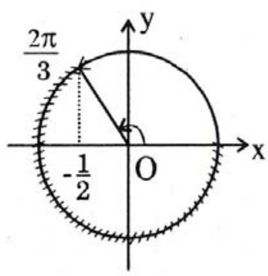
b/ Tìm m sao cho (*) có đúng hai nghiệm trên $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\cos^2 x - 1 - m\cos x) = m(1 - \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)\left[2\cos^2 x - 1 - m\cos x - m(1 - \cos x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\cos^2 x - 1 - m) = 0$$

a/ Khi m = -2 thì (*) thành :



$(\cos x + 1)(2\cos^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ cosx = -1

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in Z)$

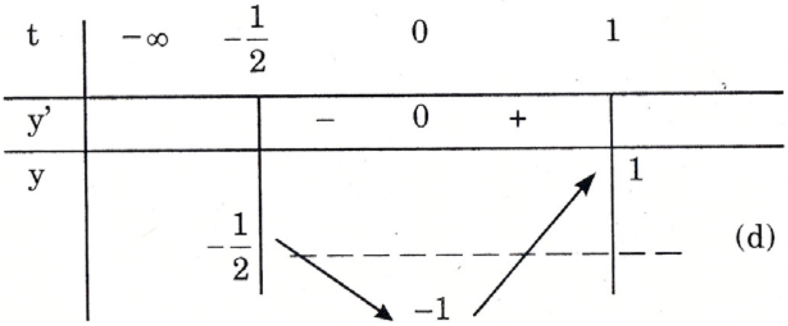
b / Khi $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ thì $\cos x = t \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

Nhận xét rằng với mỗi t trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ta chỉ tìm được duy nhất một x trên $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2t^2 - 1 - m = 0$ có đúng hai nghiệm trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

Xét $y = 2t^2 - 1 \ (P)$ và $y = m \ (d)$

Ta có y' = 4t



Vậy (*) có đúng hai nghiệm trên $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

$\Leftrightarrow$ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

$\Leftrightarrow -1 < m \le \frac{1}{2}$

<u>Bài 82</u> : Cho phương trình $(1 - a)\,tg^2x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0 \ (1)$

a/ Giải (1) khi $a = \frac{1}{2}$

b/ Tìm a để (1) có nhiều hơn một nghiệm trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Điều kiện : $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$(1) \Leftrightarrow (1-a)\sin^2 x - 2\cos x + (1+3a)\cos^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow (1-a)\left(1-\cos^2 x\right) - 2\cos x + (1+3a)\cos^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow 4a\cos^2 x - 2\cos x + 1 - a = 0$$
$$\Leftrightarrow a\left(4\cos^2 x - 1\right) - (2\cos x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)\left[a(2\cos x + 1) - 1\right] = 0$$

a/ Khi $a = \frac{1}{2}$ thì (1) thành : $(2\cos x - 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}(\text{nhận do} \cos x \neq 0)$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi(k \in Z)$

b/ Khi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x = t \in (0,1)$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = t = \frac{1}{2} \in (0,1)\\ 2a\cos x = 1 - a(2)\end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm trên $(0,1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 0 < \frac{1-a}{2a} < 1 \\ \frac{1-a}{2a} \neq \frac{1}{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{1-a}{2a} > 0 \\ \frac{1-3a}{2a} < 0 \\ 2(1-a) \neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a < 0 \vee a > \frac{1}{3} \\ a \neq \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < a < 1 \\ a \neq \frac{1}{2}\end{cases}$$

<u>Cách khác</u> : đặt $u = \frac{1}{\cos x}$, điều kiện $u \geq 1$; pt thành

$(1-a)(u^2 - 1) - 2u + 1 + 3a = 0 \Leftrightarrow (1-a)u^2 - 2u + 4a = 0$

$\Leftrightarrow (u-2)[(1-a)u - 2a] = 0$

<u>Bài 83</u> : Cho phương trình : $\cos 4x + 6\sin x\cos x = m(1)$

a/ Giải (1) khi m = 1

b/ Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 2x\left(|t| \le 1\right) \\ 2t^2 - 3t + m - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

a/ Khi m = 1 thì (1) thành

$$\begin{cases} t = \sin 2x\left(|t| \le 1\right) \\ 2t^2 - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 2x\left(|t| \le 1\right) \\ t = 0 \vee t = \dfrac{3}{2} (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

b/ Khi $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ thì $\sin 2x = t \in [0,1]$

Nhận thấy rằng mỗi t tìm được trên $[0,1]$ ta chỉ tìm được duy nhất một $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow -2t^2 + 3t + 1 = m$

Xét $y = -2t^2 + 3t + 1$ trên $[0,1]$

Thì $y' = -4t + 3$

t	0		3/4		1
y'					
y	1	↗	$\frac{17}{8}$	↘	2

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (d) y = m cắt tại hai điểm phân biệt trên $[0,1]$

$$\Leftrightarrow 2 \le m < \frac{17}{8}$$

<u>Cách khác</u> :đặt $f(x) = 2t^2 - 3t + m - 1$. Vì a = 2 > 0, nên ta có

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 17 - 8m > 0 \\ f(0) = m - 1 \ge 0 \\ f(1) = m - 2 \ge 0 \\ 0 \le \dfrac{S}{2} = \dfrac{3}{4} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le m < \dfrac{17}{8}$

<u>Bài 84</u> : Cho phương trình

$$4\cos^5 x.\sin x - 4\sin^5 x\cos x = \sin^2 4x + m \quad (1)$$

a/ Biết rằng $x = \pi$ là nghiệm của (1). Hãy giải (1) trong trường hợp đó.

b/ Cho biết $x = -\frac{\pi}{8}$ là một nghiệm của (1). Hãy tìm tất cả nghiệm của (1) thỏa $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

$$(1) \Leftrightarrow 4\sin x\cos x\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right) = \sin^2 4x + m$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = \sin^2 4x + m$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x = \sin^2 4x + m$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 4x - \sin 4x + m = 0 \qquad (1)$$

a/ $x = \pi$ là nghiệm của (1) $\Rightarrow \sin^2 4\pi - \sin 4\pi + m = 0$
$\Rightarrow m = 0$
Lúc đó (1) $\Leftrightarrow \sin 4x\left(1 - \sin 4x\right) = 0$
$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \vee \sin 4x = 1$
$$\Leftrightarrow 4x = k\pi \vee 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\left(k \in Z\right)$$
b/ $x^4 - 3x^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \geq 0 \\ t^2 - 3t + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \geq 0 \\ 1 < t < 2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow 1 < x^2 < 2 \Leftrightarrow 1 < |x| < \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < -1 \vee 1 < x < \sqrt{2}\,(*)$
$$x = -\frac{\pi}{8} \text{ thì } \sin 4x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
$$x = -\frac{\pi}{8} \text{ là nghiệm của } (1) \Rightarrow 1 + 1 + m = 0$$
$$\Rightarrow m = -2$$
Lúc đó (1) thành : $\sin^2 4x - \sin 4x - 2 = 0$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 4x\left(\text{với } |t| \leq 1\right) \\ t^2 - t - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 4x\left(\text{với } |t| \leq 1\right) \\ t = -1 \vee t = 2\left(\text{loại}\right) \end{cases}$$
$\Leftrightarrow \sin 4x = -1$
$$\Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$
Kết hợp với điều kiện (*) suy ra k = 1
Vậy (1) có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{8}$ thỏa $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

Bài 85 : Tìm a để hai phương trình sau tương đương
$$2\cos x.\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \qquad (1)$$
$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + \left(4 - a\right)\left(1 + \cos 2x\right) \qquad (2)$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 + \left(2\cos^2 x - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(1 - 2\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x - \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = a\cos x + (4 - a)2\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + (4 - 2a)\cos^2 x(a - 3)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 4\cos^2 x + 2(2 - a)\cos x + a - 3 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left[2\cos x + 3 - a\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = \frac{a-3}{2}$$

Vậy yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{a-3}{2} = 0\\ \dfrac{a-3}{2} = \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{a-3}{2} < -1 \vee \dfrac{a-3}{2} > 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = 3\\ a = 4\\ a < 1 \vee a > 5\end{array}\right.$$

Bài 86 : Cho phương trình : $\cos 4x = \cos^2 3x + a\sin^2 x$ (*)

a/ Giải phương trình khi a = 1

b/ Tìm a để (*) có nghiệm trên $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{a}{2}(1 - \cos 2x)$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 2x - 1\right) = 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + a\left(1 - \cos 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \quad \left(|t| \le 1\right)\\ 2\left(2t^2 - 1\right) = 1 + 4t^3 - 3t + a(1 - t)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \quad \left(|t| \le 1\right)\\ -4t^3 + 4t^2 + 3t - 3 = a(1 - t)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \cos 2x \quad \left(|t| \le 1\right)\\ (t - 1)\left(-4t^2 + 3\right) = a(1 - t) \quad (**)\end{cases}$$

a/ Khi a = 1 thì (*) thành :

$$\begin{cases} t = \cos 2x \quad (|t| \le 1) \\ (t-1)(-4t^2+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \quad (|t| \le 1) \\ t = \pm 1 \end{cases}$$

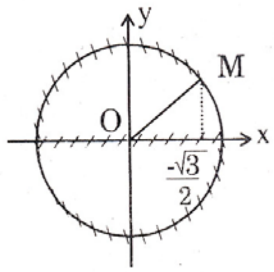
$$\Leftrightarrow \cos 2x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, (k \in Z)$$

b/ Ta có : $x \in \left(0, \frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow 2x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$. Vậy $\cos 2x = t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

Vậy (**) $\Leftrightarrow (t\text{-}1)(-4t^2+3) = a(1-t)$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 3 = a \ (\text{do } t \ne 1)$$



Xét $y = 4t^2 - 3$ (P) trên $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

$$\Rightarrow y' = 8t > 0 \quad \forall t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

Do đó (*) có nghiệm trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow (d): y = a$ cắt (P) trên $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

$$\Leftrightarrow y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < a < y(1)$$

$$\Leftrightarrow 0 < a < 1$$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a/ $\sin 4x = tgx$

b/ $\sin^4 x + \sin^4 x\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$

c/ $tgx + \cot gx = 4$

d/ $\dfrac{\sin x\left(3\sqrt{2} - 2\cos x\right) - 2\sin^2 x - 1}{1 - \sin 2x} = 1$

e/ $4\cos^4 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$

f/ $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$

g/ $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

h/ $\sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

k/ $\cos\dfrac{4x}{3} = \cos^2 x$

l/ $tg\dfrac{x}{2}.\cos x + \sin 2x = 0$

m/ $1+3\text{tg}x = 2\sin 2x$

n/ $\cot gx = \text{tg}x + 2\text{tg}2x$

p/ $2\cos^2\frac{3x}{5} + 1 = 3\cos\frac{4x}{5}$

q/ $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$

r/ $2\cos^2\frac{3x}{2} + 1 = 3\cos 2x$

s/ $\cos x + \text{tg}\frac{x}{2} = 1$

t/ $3\text{tg}2x - 4\text{tg}3x = \text{tg}^2 3x.\text{tg}2x$

u/ $\cos x.\cos 4x + \cos 2x.\cos 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

v/ $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

w/ $\sin 4x = \text{tg}x$

x/ $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{13}{8}\cos^2 2x$

y/ $\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right)$

2. $\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 2x$ (1)

a/ Giải phương trình khi a = 1.

b/ Tìm a để (1) có nghiệm (ĐS : $|a| \ge \frac{1}{4}$)

3. Cho phương trình

$$\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m\text{tg}2x \quad (1)$$

a/ Giải phương trình khi $m = \frac{1}{8}$

b/ Tìm m sao cho (1) có nghiệm (ĐS : $|m| \ge \frac{1}{8}$)

4. Tìm m để phương trình

$\sin 4x = m\text{tg}x$ có nghiệm $x \ne k\pi$

$\left(\text{ĐS}: -\frac{1}{2} < m < 4\right)$

5. Tìm m để phương trình :

$\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0$

có đúng 7 nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ $(\text{ĐS}: 1 < m < 3)$

6. Tìm m để phương trình :

$4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - \sin^2 4x = m$ có nghiệm

$\left(\text{ĐS}: -\frac{1}{8} \le m \le 1\right)$

7. Cho phương trình :

$6\sin^2 x - \sin^2 x = m\cos^2 2x \qquad (1)$

a/ Giải phương trình khi m = 3

b/ Tìm m để (1) có nghiệm $\qquad (\text{ĐS}: m \geq 0)$

8. Tìm m để phương trình :

$$\sin^4 x + \cos 4x + \frac{m}{4}\sin 4x - \frac{(2m+1)}{4}\sin^2 x = 0$$

có hai nghiệm phân biệt trên $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left(\text{ĐS}: 2\sqrt{5} - 4 < m < \frac{1}{2}\right)$$

9. Tìm m để phương trình :

$\sin^6 x + \cos^6 x = m\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$ có nghiệm

$$\left(\text{ĐS}: \frac{1}{2} \leq m \leq 1\right)$$

10. Cho phương trình :

$\cos 4x = \cos^2 3x + a\sin^2 x$

Tìm a để phương trình có nghiệm $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$(\text{ĐS}: 0 < a < 1)$$

Th.S Phạm Hồng Danh

TT luyện thi đại học CLC Vĩnh Viễn