Chương 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$$

$$\text{tgu} = \text{tgv} \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ u = v + k'\pi \end{cases}$$

$$\cot gu = \cot gv \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \\ u = v + k'\pi \end{cases}$$

$$(k, k' \in Z)$$

Đặc biệt : $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$ $\qquad$ $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in Z)$ $\qquad$ $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \ (k \in Z)$

$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $\qquad$ $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$

Chú ý : $\sin u \neq 0 \Leftrightarrow \cos u \neq \pm 1$

$\cos u \neq 0 \Leftrightarrow \sin u \neq \pm 1$

Bài 28 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D, năm 2002)
Tìm $x \in [0, 14]$ nghiệm đúng phương trình
$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0 (*)$

Ta có (*) : $\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x) - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \ \Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $\cos x = 2$ (loại vì $\cos x \leq 1$)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$

Ta có : $x \in [0, 14] \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \leq 14$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} \leq k\pi \leq 14 - \dfrac{\pi}{2} \ \Leftrightarrow -0,5 = -\dfrac{1}{2} \leq k \leq \dfrac{14}{\pi} - \dfrac{1}{2} \approx 3,9$

Mà $k \in Z$ nên $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Do đó : $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}\right\}$

Bài 29 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D, năm 2004)
Giải phương trình :
$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x (*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)\left[(2\sin x + \cos x) - \sin x\right] = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \vee \operatorname{tg}x = -1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ (k \in Z)$

Bài 30 : Giải phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 (*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{5x}{2} = 0 \vee \cos x = 0 \vee \cos\frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + 2\pi, \ (k \in Z)$

Bài 31: Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x (*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)$

$\Leftrightarrow -(\cos 2x + \cos 6x) = \cos 4x + \cos 8x$

$\Leftrightarrow -2\cos 4x\cos 2x = 2\cos 6x\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 6x + \cos 4x) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos 2x\cos 5x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 5x = 0 \vee \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 5x\frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

Bài 32 : Cho phương trình

$\sin x.\cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2} \ (*)$

Tìm các nghiệm của phương trình thỏa: $|x - 1| < 3$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \sin x.\cos 4x - \frac{1}{2}(1-\cos 4x) = 2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] - \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 4x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x = -\frac{3}{2} - 2\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 4x + 1 + 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) + 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 4x + 2)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = -2\,(\text{loại})\\ \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \frac{7\pi}{6} + 2h\pi\end{array}\right.$

Ta có : $|x-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$

Vậy : $-2 < -\frac{\pi}{6} + k2\pi < 4$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - 2 < 2k\pi < 4 + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi} < k < \frac{2}{\pi} + \frac{1}{12}$

Do $k \in Z$ nên $k = 0$. Vậy $x = -\frac{\pi}{6}$

$-2 < \frac{7\pi}{6} + h2\pi < 4$

$\Leftrightarrow -2 - \frac{7\pi}{6} < h2\pi < 4 - \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{\pi} - \frac{7}{12} < h < \frac{2}{\pi} - \frac{7}{12}$

$\Rightarrow h = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$. Tóm lại $x = \frac{-\pi}{6}$ hay $x = \frac{7\pi}{6}$

Cách khác : $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k\frac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy : $-2 < (-1)^k\frac{-\pi}{6} + k\pi < 4 \Leftrightarrow \frac{-2}{\pi} < (-1)^k\frac{-1}{6} + k < \frac{4}{\pi}$

$\Leftrightarrow$ k=0 và $k = 1$. Tương ứng với $x = \frac{-\pi}{6}$ hay $x = \frac{7\pi}{6}$

Bài 33 : Giải phương trình

$\sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x = \sin^3 4x\,(*)$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x) = \sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x\cos^3 x - 3\sin^3 x\cos x + 3\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos^3 x = \sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^3 4x$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin 2x\cos 2x = \sin^3 4x$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin 4x = \sin^3 4x$$
$$\Leftrightarrow 3\sin 4x - 4\sin^3 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin 12x = 0$$
$$\Leftrightarrow 12x = k\pi \qquad \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{12}(k \in Z)$$

Bài 34 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B, năm 2002)
Giải phương trình :
$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6a\,(*)$

Ta có : (*)$\Leftrightarrow$
$$\frac{1}{2}(1-\cos 6x) - \frac{1}{2}(1+\cos 8x) = \frac{1}{2}(1-\cos 10x) - \frac{1}{2}(1+\cos 12x)$$
$$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 7x\cos x = 2\cos 11x\cos x$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 7x - \cos 11x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos 7x = \cos 11x$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 7x = \pm 11x + k2\pi$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 35 : Giải phương trình
$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = \cos 2x(2\cos x + 1)$$
$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \vee \sin 2x = \cos 2x$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee tg2x = 1 = tg\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in Z)$$

Bài 36: Giải phương trình
$\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x.\cos x = \cos x + 8\cos x.\cos^3 3x\,(*)$

Ta có : (*)$\Leftrightarrow \cos 10x + (1+\cos 8x) = \cos x + 2\cos x(4\cos^3 3x - 3\cos 3x)$
$$\Leftrightarrow (\cos 10x + \cos 8x) + 1 = \cos x + 2\cos x.\cos 9x$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 9x\cos x + 1 = \cos x + 2\cos x.\cos 9x$$
$$\Leftrightarrow \cos x = 1$$
$$\Leftrightarrow x = k2\pi(k \in Z)$$

Bài 37 : Giải phương trình

$$4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x\cos x = 0\ (*)$$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \sin x\left(4\sin^2 x - 3\right) - \cos x\left(\sin^2 x - 3\cos^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(4\sin^2 x - 3\right) - \cos x\left[\sin^2 x - 3\left(1 - \sin^2 x\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left(4\sin^2 x - 3\right)\left(\sin x - \cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[2\left(1 - \cos 2x\right) - 3\right]\left(\sin x - \cos x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \\ \sin x = \cos x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \text{tg}x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad \left(k \in Z\right)$$

<u>Bài 38 :</u> (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2005)
Giải phương trình :
$\sin x + \cos x + 1 + \sin 2x + \cos 2x = 0\ (*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\cos x\left(\sin x + \cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x + \cos x\right)\left(1 + 2\cos x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\cos x \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -1 \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad \left(k \in Z\right)$$

<u>Bài 39 :</u> Giải phương trình
$\left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + 4\cos^2 x = 3\ (*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + 4\left(1 - \sin^2 x\right) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + \left(1 + 2\sin x\right)\left(1 - 2\sin x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left[3\cos 4x + 2\sin x - 4 + \left(1 - 2\sin x\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow 3\left(\cos 4x - 1\right)\left(2\sin x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \vee \sin x = -\dfrac{1}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in Z)$

Bài 40: Giải phương trình
$\sin^6 x + \cos^6 x = 2(\sin^8 x + \cos^8 x)(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \sin^6 x - 2\sin^8 x + \cos^6 x - 2\cos^8 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^6 x(1 - 2\sin^2 x) - \cos^6 x(2\cos^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^6 x \cos 2x - \cos^6 x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^6 x - \cos^6 x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \sin^6 x = \cos^6 x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee tg^6 x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \vee tgx = \pm 1$

$\Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \vee x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in$ □

Bài 41 : Giải phương trình
$\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x = \frac{1}{16}(*)$

Ta thấy $x = k\pi$ không là nghiệm của (*) vì lúc đó
$\cos x = \pm 1, \cos 2x = \cos 4x = \cos 8x = 1$

(*) thành : $\pm 1 = \frac{1}{16}$ vô nghiệm

Nhân 2 vế của (*) cho $16\sin x \neq 0$ ta được

(*)$\Leftrightarrow (16\sin x\cos x)\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow (8\sin 2x\cos 2x)\cos 4x.\cos 8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow (4\sin 4x\cos 4x)\cos 8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 8x\cos 8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin 16x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{15} \vee x = \frac{\pi}{17} + \frac{k\pi}{17}, (k \in Z)$

Do : $x = h\pi$ không là nghiệm nên $k \neq 15m$ và $2k+1 \neq 17n\ (n, m \in Z)$

Bài 42: Giải phương trình $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x(*)$

Đặt $t = x + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = t - \frac{\pi}{3}$

Thì $\cos 3x = \cos(3t - \pi) = \cos(\pi - 3t) = -\cos 3t$

Vậy (*) thành $8\cos^3 t = -\cos 3t$

$\Leftrightarrow 8\cos^3 t = -4\cos^3 t + 3\cos t$

$\Leftrightarrow 12\cos^3 t - 3\cos t = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos t(4\cos^2 t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos t\left[2(1 + \cos 2t) - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos t(2\cos 2t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos t = 0 \vee \cos 2t = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow t = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \vee 2t = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee t = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

Mà $x = t - \dfrac{\pi}{3}$

Vậy (*)$\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = k\pi \vee x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi, (\text{với} k \in Z)$

Ghi chú :

Khi giải các phương trình lượng giác có chứa tgu, cotgu, có ẩn ở mẫu, hay chứa căn bậc chẵn... ta phải đặt điều kiện để phương trình xác định. Ta sẽ dùng các cách sau đây để kiểm tra điều kiện xem có nhận nghiệm hay không.

+ Thay các giá trị x tìm được vào điều kiện thử lại xem có thỏa

Hoặc + Biểu diễn các ngọn cung điều kiện và các ngọn cung tìm được trên cùng một đường tròn lượng giác. Ta sẽ loại bỏ ngọn cung của nghiệm khi có trùng với ngọn cung của điều kiện.

Hoặc + So vơi các điều kiện trong quá trình giải phương trình.

Bài 43 : Giải phương trình $tg^2x - tgx.tg3x = 2(*)$

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{h\pi}{3}$

Lúc đó ta có (*) $\Leftrightarrow tgx(tgx - tg3x) = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}\right) = 2$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin x\cos 3x - \cos x\sin 3x) = 2\cos^2 x\cos 3x$

$\Leftrightarrow \sin x\sin(-2x) = 2\cos^2 x.\cos 3x$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x\cos x = 2\cos^2 x\cos 3x$

$\Leftrightarrow -\sin^2 x = \cos x\cos 3x$ (do $\cos x \neq 0$)

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \dfrac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \cos 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi$

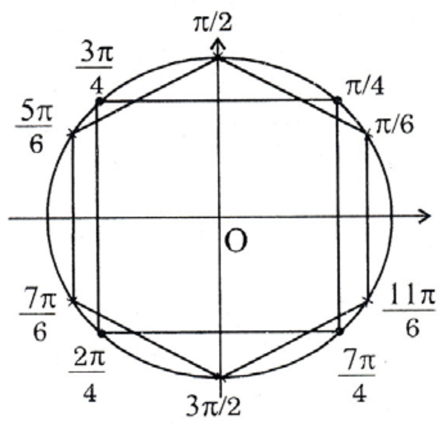
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \left(k \in Z\right)$

so với điều kiện

Cách 1 : Khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ thì $\cos 3x = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$ (nhận)

Cách 2 : Biểu diễn các ngọn cung điều kiện và ngọn cung nghiệm ta thấy không có ngọn cung nào trùng nhau. Do đó :

$(*) \Leftrightarrow \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$



Lưu ý cách 2 rất mất thời gian

Cách 3 :

Nếu $3x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + h\pi$

Thì $3 + 6k = 2 + 4h$

$\Leftrightarrow 1 = 4h - 6k$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2h - 3k$ (vô lý vì $k, h \in Z$)

<u>Bài 44:</u> Giải phương trình

$tg^2x + \cot g^2x + \cot g^2 2x = \frac{11}{3} (*)$

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

Do đó :

$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) + \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + \left(\frac{1}{\sin^2 2x} - 1\right) = \frac{11}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{4\sin^2 x + 4\cos^2 x + 1}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{\sin^2 2x} = \frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4}$ (nhận do $\sin 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \cos 4x\right) = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \left(k \in Z\right)$

Chú ý : Có thể dễ dàng chứng minh : $tgx + \cot gx = \dfrac{2}{\sin 2x}$

Vậy $(*) \Leftrightarrow (tgx + \cot gx)^2 - 2 + \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right) = \dfrac{11}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sin^2 2x} = \dfrac{20}{3}$

Bài 45 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D, năm 2003)
Giải phương trình

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)tg^2x - \cos^2\frac{x}{2} = 0\,(*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

lúc đó :

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}\left[1 + \cos x\right] = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1 - \sin x)(1 - \cos^2 x)}{1 - \sin^2 x} - (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 + \sin x} - (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)\left[\dfrac{1 - \cos x}{1 + \sin x} - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(-\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\,(\text{nhận do } \cos x \neq 0)\\ tgx = -1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right.$

Bài 46 : Giải phương trình
$\sin 2x(\cot gx + tg2x) = 4\cos^2 x\,(*)$

Điều kiện : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \neq 0\\ 2\cos^2 x - 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq \pm 1\\ \cos x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Ta có : $\cot gx + tg2x = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$= \dfrac{\cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x}{\sin x\cos 2x}$

$= \dfrac{\cos x}{\sin x\cos 2x}$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x\left(\dfrac{\cos x}{\sin x\cos 2x}\right) = 4\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x} = 4\cos^2 x \quad (\text{Do} \sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \dfrac{1}{\cos 2x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \left(\text{Nhận do} \cos x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ và} \neq \pm 1 \right) \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}, (\text{nhận do} \sin x \neq 0) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 47 : Giải phương trình:

$$\frac{\cot g^2 x - tg^2 x}{\cos 2x} = 16(1 + \cos 4x)$$

Ta có : $\cot g^2 x - tg^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

Điều kiện : $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \sin 4x \neq 0$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \dfrac{4}{\sin^2 2x} = 16(1 + \cos 4x)$

$$\Leftrightarrow 1 = 4(1 + \cos 4x)\sin^2 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2(1 + \cos 4x)(1 - \cos 4x)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2(1 - \cos^2 4x) = 2\sin^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 4x = \frac{1}{2} (\text{nhận do } \sin 4x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 8x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 48: Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{7}{8}\cot g\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\cot g\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) (*)$

Điều kiện $\begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow tg2x \neq \sqrt{3}$$

Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

Và: $\cot g\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\cot g\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot g\left(x + \frac{\pi}{3}\right).tg\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{7}{8}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\left(1 - \cos 4x\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

(nhận do $tg2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \neq \sqrt{3}$)

Bài 49: Giải phương trình $2tgx + \cot g2x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}(*)$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + \cos 2x = 2\sin^2 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 8\sin^2 x\cos^2 x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(1 - 4\cos^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left[1 - 2\left(1 + \cos 2x\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\left(\text{loại do } \sin 2x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0\right) \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}\left(\text{nhận do} \cos 2x \neq \pm 1\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\left(k \in Z\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 51: Giải phương trình: $\frac{3\left(\sin x + tgx\right)}{tgx - \sin x} - 2\left(1 + \cos x\right) = 0(*)$

Điều kiện : $tgx - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow \dfrac{3(\sin x + tgx).\cot gx}{(tgx - \sin x).\cot gx} - 2(1+\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\cos x + 1)}{(1-\cos x)} - 2(1+\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1-\cos x} - 2 = 0 \left(\text{do} \sin x \neq 0 \text{ nên} \cos x + 1 \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\cos x = 0$$

$\Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$ (nhận so với điều kiện)

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 52 : Giải phương trình

$$\frac{(1-\cos x)^2 + (1+\cos x)^2}{4(1-\sin x)} - tg^2 x \sin x = \frac{1}{2}(1+\sin x) + tg^2 x \, (*)$$

Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2(1+\cos^2 x)}{4(1-\sin x)} - \dfrac{\sin^3 x}{1-\sin^2 x} = \dfrac{1}{2}(1+\sin x) + \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

$$\Leftrightarrow (1+\cos^2 x)(1+\sin x) - 2\sin^3 x = (1+\sin x)(1-\sin^2 x) + 2\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(1+\cos^2 x) = (1+\sin x)\cos^2 x + 2\sin^2 x(1+\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+\sin x = 0 \\ 1+\cos^2 x = \cos^2 x + 2\sin^2 x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \,(\text{loại do} \cos x \neq 0) \\ 1 = 1 - \cos 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ (nhận do $\cos x \neq 0$)

Bài 53 : Giải phương trình

$$\cos 3x.tg5x = \sin 7x \, (*)$$

Điều kiện $\cos 5x \neq 0$

Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow \cos 3x.\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x} = \sin 7x$

$\Leftrightarrow \sin 5x.\cos 3x = \sin 7x.\cos 5x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\sin 8x + \sin 2x] = \frac{1}{2}[\sin 12x + \sin 2x]$

$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin 12x$

$\Leftrightarrow 12x = 8x + k2\pi \vee 12x = \pi - 8x + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$

So lại với điều kiện

$x = \frac{k\pi}{2}$ thì $\cos 5x = \cos\frac{5k\pi}{2} = \cos\frac{k\pi}{2}$ (loại nếu k lẻ)

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$ thì $\cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) \neq 0$ nhận

Do đó : (*) $\Leftrightarrow x = h\pi \vee x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$, với k, h $\in \mathbb{Z}$

Bài 54 : Giải phương trình

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\text{tg}x + \cot g2x) \ (*)$$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

Ta có : $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$\text{tg}x + \cot g2x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$= \frac{\sin 2x \sin x + \cos x \cos 2x}{\cos x \sin 2x}$

$= \frac{\cos(2x - x)}{\cos x \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$

Do đó : (*) $\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1$ (nhận do $\sin 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 55 : Giải phương trình

$$\text{tg}^2x.\cot g^2 2x.\cot g3x = \text{tg}^2x - \cot g^2 2x + \cot g3x \ (*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \wedge \sin 2x \neq 0 \wedge \sin 3x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \wedge \sin 3x \neq 0$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \text{cotg}3x\left(tg^2x \cot g^2 2x - 1\right) = tg^2x - \cot g^2 2x$

$$\Leftrightarrow \cot g3x\left[\left(\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\right)\left(\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}\right) - 1\right] = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} - \frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

$\Leftrightarrow \cot g3x\left[(1-\cos 2x)(1+\cos 4x) - (1+\cos 2x)(1-\cos 4x)\right]$

$= (1-\cos 2x)(1-\cos 4x) - (1+\cos 4x)(1+\cos 2x)$

$\Leftrightarrow \cot g3x\left[2\cos 4x - 2\cos 2x\right] = -2\left(\cos 4x + \cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos 3x}{\sin 3x}\left[-4\sin 3x \sin x\right] = -4\cos 3x \cos x$

$\Leftrightarrow \cos 3x \sin x = \cos 3x \cos x \qquad \left(\text{do } \sin 3x \neq 0\right)$

$\Leftrightarrow \cos 3x = 0 \vee \sin x = \cos x$

$\Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee tgx = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \vee x = \dfrac{\pi}{4} + l\pi\left(k, l \in Z\right)$

So với điều kiện: $\sin 2x . \sin 3x \neq 0$

* Khi $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ thì $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}\right) . \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{1+2k}{3}\right)\pi \neq 0$

Luôn đúng $\forall k$ thỏa $2k + 1 \neq 3m\left(m \in Z\right)$

* Khi $x = \dfrac{\pi}{4} + l\pi$ thì $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} + 3l\pi\right) = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

luôn đúng

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}\ ,\ k \in Z \wedge 2k \neq 3m - 1\left(m \in \mathbb{Z}\right) \\ x = \dfrac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

<u>Cách khác:</u>

(*) $\Leftrightarrow \text{cotg}3x\left(tg^2x \cot g^2 2x - 1\right) = tg^2x - \cot g^2 2x$

$$\Leftrightarrow \cot g3x = \frac{tg^2x - \cot g^2 2x}{tg^2x \cot g^2 2x - 1} = \frac{tg^2 2x . tg^2x - 1}{tg^2x - tg^2 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cot g3x = \frac{(1 + tg2x.tgx)(1 - tg2x.tgx)}{(tg2x - tgx)(tg2x + tgx)}$$

$\Leftrightarrow \cot g3x = \cot gx . \text{cotg}3x \Leftrightarrow \cos 3x = 0 \vee \sin x = \cos x$

BÀI TẬP

1. Tìm các nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{3}, 3\pi\right)$ của phương trình:

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$$

2. Tìm các nghiệm x trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình

$$\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(10{,}5\pi + 10x)$$

3. Giải các phương trình sau:

a/ $\sin^3 x + \cos^3 x = 2\left(\sin^5 x + \cos^5 x\right)$

b/ $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$

c/ $tg^2x = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

d/ $tg2x - tg3x - tg5x = tg2x.tg3x.tg5x$

e/ $\cos\dfrac{4}{3}x = \cos^2 x$

f/ $2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

i/ $2tgx + \cot g2x = \sqrt{3} + \dfrac{2}{\sin 2x}$

h/ $3tg3x + \cot g2x = 2tgx + \dfrac{2}{\sin 4x}$

k/ $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$

l/ $\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x} + 2\cos x = 0$

m/ $\sqrt{25 - 4x^2}\left(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x\right) = 0$

n/ $\dfrac{\sin x.\cot g5x}{\cos 9x} = 1$

o/ $3tg6x - \dfrac{2}{\sin 8x} = 2tg2x - \cot g4x$

p/ $2\sin 3x\left(1 - 4\sin^2 x\right) = 1$

q/ $tg^2x = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

r/ $\cos^3 x\cos 3x + \sin^3 x\sin 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

s/ $\sin^4\left(\dfrac{x}{3}\right) + \cos^4\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{5}{8}$

t/ $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0$

u/ $\sin^4\dfrac{x}{2} + \cos^4\dfrac{x}{2} = 1 - 2\sin x$

v/ $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

w/ $tg^4x+1=\frac{\left(2-\sin^2 x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$

y/ $tgx+\cos x-\cos^2 x=\sin x\left(1+tg\frac{x}{2}tgx\right)$

4. Cho phương trình: $\left(2\sin x-1\right)\left(2\cos 2x+2\sin x+m\right)=3-4\cos^2 x\left(1\right)$

   a/ Giải phương trình khi m = 1

   b/ Tìm m để (1) có đúng 2 nghiệm trên $\left[0,\pi\right]$

   (ĐS: $m=0\vee m<-1\vee m>3$)

5. Cho phương trình:

   $4\cos^5 x\sin x-4\sin^5 x.\cos x=\sin^2 4x+m\left(1\right)$

   Biết rằng $x=\pi$ là một nghiệm của (1). Hãy giải phương trình trong trường hợp đó.

Th.S Phạm Hồng Danh

TT luyện thi Đại học CLC Vĩnh Viễn