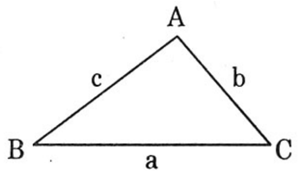
CHƯƠNG X: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I. ĐỊNH LÝ HÀM SIN VÀ COSIN

Cho ΔABC có a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện của $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, S là diện tích ΔABC thì

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 4S.\text{cotg}A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - 4S.\text{cotg}B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 4S.\text{cotg}C \end{array}}$$



Bài 184	Cho ΔABC. Chứng minh: $A = 2B \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$

Ta có: $a^2 = b^2 + bc \Leftrightarrow 4R^2\sin^2 A = 4R^2\sin^2 B + 4R^2\sin B.\sin C$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\cos 2A) - \frac{1}{2}(1-\cos 2B) = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos 2B - \cos 2A = 2\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(B+A)\sin(B-A) = 2\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(B+A)\sin(A-B) = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = \sin B \quad (\text{do} \ \ \sin(A+B) = \sin C > 0)$$

$$\Leftrightarrow A - B = B \vee A - B = \pi - B\,(\text{loại})$$

$$\Leftrightarrow A = 2B$$

<u>Cách khác:</u>

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B) = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(B+A)\sin(A-B) = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = \sin B \quad (\text{do} \ \ \sin(A+B) = \sin C > 0)$$

$$\Leftrightarrow A - B = B \vee A - B = \pi - B\,(\text{loại})$$

$$\Leftrightarrow A = 2B$$

Bài 185: Cho ΔABC. Chứng minh: $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2}$

Ta có $\dfrac{a^2-b^2}{c^2} = \dfrac{4R^2\sin^2 A - 4R^2\sin^2 B}{4R^2\sin^2 C}$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2A) - \frac{1}{2}(1-\cos 2B)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2\sin^2 C} = \frac{-2\sin(A+B)\sin(B-A)}{2\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin^2 C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

$\left(\text{do } \sin(A+B) = \sin C > 0\right)$

Bài 186: Cho ΔABC biết rằng $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}\cdot$

Chứng minh $a+b=2c$

Ta có : $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$$\left(\text{do } \cos\frac{A}{2} > 0, \cos\frac{B}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\left[\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right] = \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2} \; (*)$$

Mặt khác: $a+b = 2R(\sin A + \sin B)$

$$= 4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 8R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \; \left(\text{do } (*)\right)$$

$$= 4R\sin(A+B)$$

$$= 4R\sin C = 2c$$

<u>Cách khác:</u>

$a+b=2c$

$\Leftrightarrow 2R(\sin A + \sin B) = 4R\sin C$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}=2\cos\frac{A+B}{2}\ \left(\text{do}\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$
$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{A}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$$

Bài 187: Cho ΔABC, chứng minh nếu $\text{cotgA}, \text{cotgB}, \text{cotgC}$ tạo một cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng là cấp số cộng.

Ta có: $\cot gA, \cot gB, \cot gC$ là cấp số cộng $\Leftrightarrow \cot gA+\cot gC=2\cot gB\ (*)$

Cách 1:

Ta có:$(*)$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\dfrac{2\cos B}{\sin B}\Leftrightarrow \sin^2 B=2\sin A\sin C\cos B$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B=-\left[\cos(A+C)-\cos(A-C)\right]\left[-\cos(A+C)\right]$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 B=\cos^2(A+C)-\cos(A-C)\cos(A+C)$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 B=\cos^2 B-\frac{1}{2}\left[\cos 2A+\cos 2C\right]$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 B=\left(1-\sin^2 B\right)-\frac{1}{2}\left[\left(1-2\sin^2 A\right)+\left(1-2\sin^2 C\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C$$
$$\Leftrightarrow \frac{2b^2}{4R^2}=\frac{a^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}$$
$$\Leftrightarrow 2b^2=a^2+c^2$$

$\Leftrightarrow a^2, b^2, c^2$ là cấp số cộng •

Cách 2:

Ta có: $a^2=b^2+c^2-2ab\cos A$

$$\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-4\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right).\text{cotgA}$$
$$\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-4S\cot gA$$

Do đó $\text{cotgA}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

Tương tự $\text{cotgB}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}, \text{cotgC}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

Do đó: $(*)$ $\Leftrightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}=2\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}$

$$\Leftrightarrow 2b^2=a^2+c^2$$

Bài 188: Cho ΔABC có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

Chứng minh $\widehat{BAC} \le 60^0$.

Ta có: $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = \frac{2a^2}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2 \; (*)$$

Do định lý hàm cosin nên ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2(b^2 + c^2) - b^2 - c^2}{4bc} \quad (\text{do } (*))$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{4bc} \ge \frac{2bc}{4bc} = \frac{1}{2} \quad (\text{do Cauchy})$$

Vậy : $\widehat{BAC} \le 60^0$.

<u>Cách khác</u>:

định lý hàm cosin cho

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$

Do đó

$(*) \Leftrightarrow a^2 + 2bc\cos A = 2a^2$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2}{4bc} \ge \frac{1}{2} (\text{do Cauchy})$$

Bài 189: Cho ΔABC. Chứng minh :

$$\text{cotgA+cotgB+cotgC} = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

Ta có: $\text{cotgA} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Tương tự: $\cot gB = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}, \cot gC = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Do đó $\cot gA + \cot gB + \cot gC = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\dfrac{abc}{4R}}$

$$= R\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$

Bài 190: Cho ΔABC có 3 góc A, B, C tạo thành một cấp số nhân có công bội q = 2. Giả sử A < B < C.

Chứng minh: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

Do A, B, C là cấp số nhân có q = 2 nên B = 2A, C = 2B = 4A

$$\text{Mà } A + B + C = \pi \text{ nên } A = \frac{\pi}{7}, B = \frac{2\pi}{7}, C = \frac{4\pi}{7}$$

Cách 1:

Ta có: $$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2R\sin B} + \frac{1}{2R\sin C}$$

$$= \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}\right)$$

$$= \frac{1}{2R}\frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{3\pi}{7}}\left(\text{do}\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{R}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2R\sin A}$$

$$= \frac{1}{a}$$

Cách 2:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 4A} = \frac{\sin 4A + \sin 2A}{\sin 2A\sin 4A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{2\sin 3A.\cos A}{\sin 2A\sin 4A} = \frac{2\cos A}{\sin 2A} = \frac{2\cos A}{2\sin A\cos A}$$

$$\text{do}: \sin 3A = \sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7} = \sin 4A \bullet$$

Bài 191: Tính các góc của ΔABC nếu

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$$

Do định lý hàm sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

nên : $$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}(*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R\sqrt{3}} = \frac{c}{4R}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a\sqrt{3} \\ c = 2a \end{cases}$$

Ta có: $c^2 = 4a^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2$

$$\Leftrightarrow c^2 = b^2 + a^2$$

Vậy ΔABC vuông tại C

Thay $\sin C = 1$ vào $(*)$ ta được

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \dfrac{1}{2} \\ \sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 30^0 \\ B = 60^0 \end{cases}$$

<u>Ghi chú</u>:

Trong tam giác ABC ta có

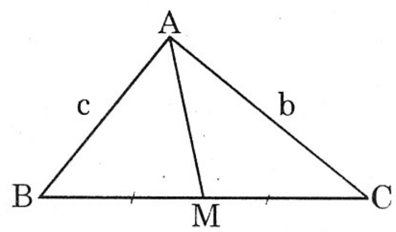
$a = b \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \sin A = \sin B \Leftrightarrow \cos A = \cos B$

II. ĐỊNH LÝ VỀ ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM thì:

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}}$$

hay : $\boxed{c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2}}$



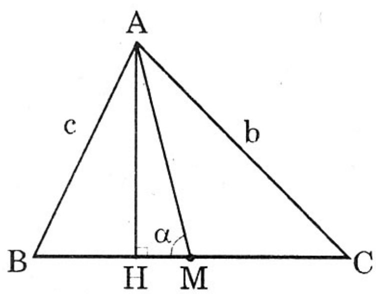
<u>Bài 192:</u> Cho $\triangle ABC$ có AM trung tuyến, $\widehat{AMB} = \alpha$, AC = b, AB = c, S là diện tích $\triangle ABC$. Với $0 < \alpha < 90^0$

a/ Chứng minh: $\text{cotg}\alpha = \dfrac{b^2 - c^2}{4S}$

b/ Giả sử $\alpha = 45^0$, chứng minh: $\text{cotg}C - \text{cotg}B = 2$

a/ $\triangle AHM$ vuông $\Rightarrow \text{cotg}\alpha = \dfrac{HM}{AH} = \dfrac{MB - BH}{AH}$

$$\Rightarrow \text{cotg}\alpha = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} (1)$$



Mặt khác: $\frac{b^2-c^2}{4S}=\frac{\left(a^2+c^2-2ac\cos B\right)-c^2}{2AH.a}$

Đặt BC = a

$\Rightarrow \frac{b^2-c^2}{4S}=\frac{a}{2AH}-\frac{c\cos B}{AH}=\frac{a}{2AH}-\frac{BH}{AH}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được : $\cot g\,\alpha=\frac{b^2-c^2}{4S}$

<u>Cách khác</u>:

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích tam giác ABH và ACH

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác ABH và ACH ta có:

$\cot g\,\alpha=\frac{AM^2+BM^2-c^2}{4S_1}$ (3)

$-\cot g\,\alpha=\frac{AM^2+CM^2-b^2}{4S_2}$ (4)

Lấy (3) – (4) ta có :

$\cot g\,\alpha=\frac{b^2-c^2}{4S}$ (vì $S_1=S_2=\frac{S}{2}$)

b/Ta có: cotgC – cotgB = $\frac{HC}{AH}-\frac{HB}{AH}=\frac{HC-HB}{AH}$

$=\frac{(MH+MC)-(MB-MH)}{AH}$

$=\frac{2MH}{AH}=2\cot g\,\alpha=2\cot g\,45^0=2$

<u>Cách khác</u>:

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác ABM và ACM ta có:

$\cot g\,B=\frac{BM^2+c^2-AM^2}{4S_1}$ (5)

$\cot g\,C=\frac{CM^2+b^2-AM^2}{4S_2}$ (6)

Lấy (6) – (5) ta có :

$\cot g\,C-\cot gB=\frac{b^2-c^2}{2S}=2\cot g\alpha=2$ (vì $S_1=S_2=\frac{S}{2}$ và câu a)

Bài 193 Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến phát xuất từ B và C là m_b, m_c thỏa $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh: 2cotgA = cotgB + cotgC

Ta có: $\frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 - \frac{c^4}{2} = a^2b^2 + b^2c^2 - \frac{b^4}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 - a^2b^2 = \frac{1}{2}\left(c^4 - b^4\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(c^2 - b^2\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 - b^2\right)\left(c^2 + b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = c^2 + b^2 \ (1) \left(\text{do } \frac{c}{b} \neq 1\right)$$

Thay $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$ vào (1), ta có (1) thành

$a^2 = 2bc\cos A$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{4R^2\sin^2 A}{2(2R\sin B)(2R\sin C)}$$

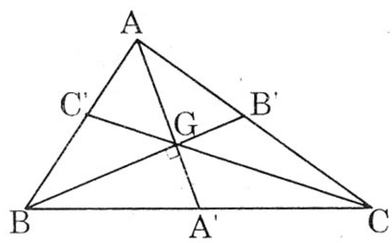
$$\Leftrightarrow 2\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{cotg}A = \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\sin B\sin C} = \text{cotg}C + \text{cotg}B$$

Bài 194: Chứng minh nếu $\triangle ABC$ có trung tuyến AA' vuông góc với trung tuyến BB' thì cotgC = 2 (cotgA + cotgB)

$\triangle GAB$ vuông tại G có GC' trung tuyến nên AB = 2GC'

Vậy $AB = \frac{2}{3}CC'$



$$\Leftrightarrow 9c^2 = 4m_c^2$$

$$\Leftrightarrow 9c^2 = 2\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2$$

$\Leftrightarrow 5c^2 = c^2 + 2ab\cos C$ (do định lý hàm cos)

$$\Leftrightarrow 2c^2 = ab\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2(2R\sin C)^2 = (2R\sin A)(2R\sin B)\cos C$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 C = \sin A \sin B \cos C$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sin C}{\sin A \sin B} = \dfrac{\cos C}{\sin C}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \text{cotgC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(\sin A\cos B + \sin B \cos A)}{\sin A \sin B} = \text{cotgC}$

$\Leftrightarrow 2(\text{cotg}\,B + \text{cotgA}) = \text{cotgC}$

III. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Gọi S: diện tích $\triangle ABC$

R: bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

r: bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

p: nửa chu vi của $\triangle ABC$

thì

$$\boxed{\begin{aligned}
&S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c\\
&S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A\\
&S = \frac{abc}{4R}\\
&S = pr\\
&S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}}$$

Bài 195: Cho $\triangle ABC$ chứng minh: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \dfrac{2S}{R^2}$

Ta có:

$\sin 2A + (\sin 2B + \sin 2C)$

$= \sin 2A + 2\sin(B + C).\cos(B - C)$

$= 2\sin A\cos A + 2\sin A\cos(B - C)$

$= 2\sin A[\cos A + \cos(B - C)]$

$= 2\sin A[-\cos(B + C) + \cos(B - C)]$

$= 2\sin A.[2\sin B.\sin C]$

$= 4.\dfrac{a}{2R}.\dfrac{b}{2R}.\dfrac{c}{2R} = \dfrac{1}{2}\dfrac{abc}{R^3} = \dfrac{1}{2}\dfrac{4RS}{R^3} = \dfrac{2S}{R^2}$

Bài 196 Cho $\triangle ABC$. Chứng minh :

S = Diện tích $(\triangle ABC) = \dfrac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2 \sin 2A\right)$

Ta có : $S = dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab\sin C$

$$= \frac{1}{2}ab\sin(A+B)$$

$$= \frac{1}{2}ab[\sin A\cos B + \sin B\cos A]$$

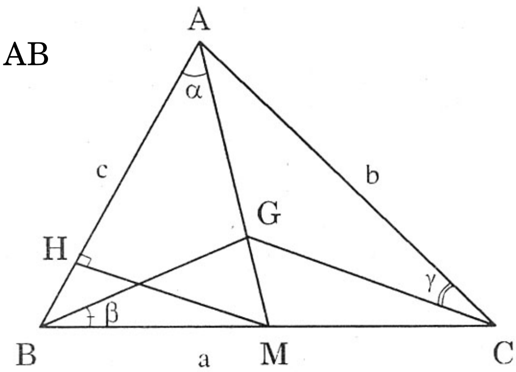
$$= \frac{1}{2}ab\left[\left(\frac{a}{b}\sin B\right)\cos B + \left(\frac{b}{a}\sin A\right)\cos A\right] \text{(do đl hàm sin)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2\sin B\cos B + b^2\sin A\cos A\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$$

Bài 197: Cho ΔABC có trọng tâm G và $\widehat{GAB} = \alpha, \widehat{GBC} = \beta, \widehat{GCA} = \gamma$.

Chứng minh: $\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{4S}$



Gọi M là trung điểm BC, vẽ $MH \perp AB$

$\Delta AMH \perp \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{AH}{AM}$

$\Delta BHM \perp \Rightarrow \cos B = \dfrac{BH}{MB} = \dfrac{2BH}{a}$

Ta có: $AB = HA + HB$

$\Leftrightarrow c = AM\cos\alpha + \dfrac{a}{2}\cos B$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{AM}\left(c - \dfrac{a}{2}\cos B\right) \quad (1)$

Mặt khác do áp dụng định lý hàm sin vào ΔAMB ta có :

$$\frac{MB}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin B} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{AM}MB\sin B = \frac{a}{2AM}\sin B \quad (2)$$

Lấy (1) chia cho (2) ta được :

$$\cot g\alpha = \frac{c - \frac{a}{2}\cos B}{\frac{a}{2}\sin B} = \frac{2c - a\cos B}{a.\frac{b}{2R}}$$

$$= \frac{R(4c - 2a\cos B)}{ab} = \frac{R(4c^2 - 2ac\cos B)}{abc}$$

$$= \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{\frac{abc}{R}} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S}$$

Chứng minh tương tự :

$$\cot g\beta = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S}$$

$$\cot g\gamma = \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}$$

Do đó:

$$\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma$$

$$= \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S} + \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}$$

$$= \frac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4S}$$

Cách khác : Ta có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ (*)

$$\cot g\alpha = \frac{c^2 + m_a^2 - \frac{a^2}{4}}{4S_{\Delta ABM}} = \frac{4c^2 + 4m_a^2 - a^2}{8S} \text{(a)}$$

Tương tự $\cot g\beta = \frac{4a^2 + 4m_b^2 - b^2}{8S}\text{(b)}, \cot g\gamma = \frac{4b^2 + 4m_c^2 - c^2}{8S}\text{(c)}$

Cộng (a), (b), (c) và kết hợp (*) ta có:

$$\cot g\,\alpha + \cot g\,\beta + \cot g\,\gamma = \frac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4S}$$

IV. BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Gọi R bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC
và r bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC thì

$$\boxed{\begin{aligned} &R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{4S} \\ &r = \frac{S}{p} \\ &r = (p-a)\,tg\frac{A}{2} = (p-b)\,tg\frac{B}{2} = (p-c)\,tg\frac{C}{2} \end{aligned}}$$

Bài 198: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.
Chứng minh:

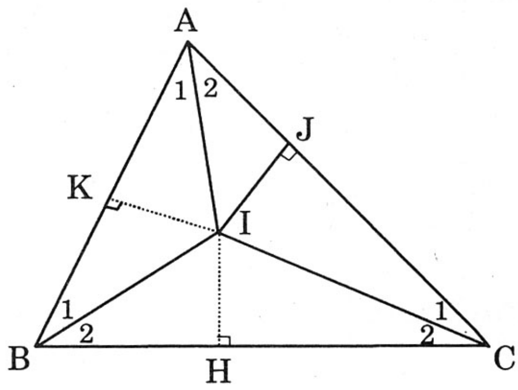
a/ $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

b/ $IA.IB.IC = 4Rr^2$

a/ Ta có : $\Delta IBH \perp \Rightarrow \text{cotg}\frac{B}{2} = \frac{BH}{IH}$

$$\Rightarrow BH = r\text{cotg}\frac{B}{2}$$

Tương tự $HC = r\,\text{cotg}\frac{C}{2}$



Mà : BH + CH = BC

nên

$$r\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right) = a$$

$$\Leftrightarrow \frac{r\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = a$$

$$\Leftrightarrow r\cos\frac{A}{2} = (2R\sin A)\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r\cos\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\ \text{(do } \cos\frac{A}{2} > 0)$$

b/ Ta có : $\Delta \perp AKI \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{IK}{IA} \Rightarrow IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$

Tương tự $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}};\ IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$

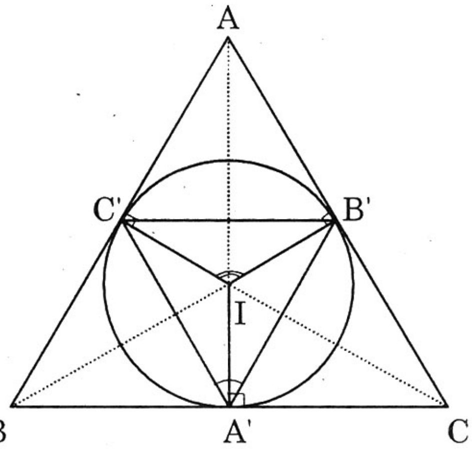
Do đó : $IA.IB.IC = \frac{r^3}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

$$= \frac{r^3}{\frac{r}{4R}} = 4Rr^2 \text{ (do kết quả câu a)}$$

Bài 199: Cho ΔABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc các cạnh ΔABC tại A', B', C'. $\Delta A'B'C'$ có các cạnh là a', b', c' và diện tích S'. Chứng minh:

$$a/\ \frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$b/\ \frac{S'}{S}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$



a/ Ta có : $\widehat{C'A'B'}=\frac{1}{2}\widehat{C'IB'}=\frac{1}{2}(\pi-A)=\frac{1}{2}(B+C)$

Áp dụng định lý hình sin vào $\Delta A'B'C'$

$\frac{a'}{\sin A'}=2r$ (r: bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC)

$\Rightarrow a'=2r\sin\widehat{A'}=2r\sin\frac{B+C}{2}$ (1)

ΔABC có : $a=BC=BA'+A'C$

$$\Rightarrow a=r\cot g\frac{B}{2}+r\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow a=r\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\quad(2)$$

Lấy $\frac{(1)}{(2)}$ ta được $\frac{a'}{a}=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Tương tự $\frac{b'}{b}=2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}$

Vậy $$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right).$$

b/ Ta có: $\widehat{A'C'B'}=\frac{1}{2}.B'IA'=\frac{1}{2}(\pi-C)=\frac{1}{2}(A+B)$

Vậy $\sin C' = \sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$

Ta có: $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{dt(\Delta A'B'C')}{dt(\Delta ABC)} = \dfrac{\frac{1}{2}a'b'\sin C'}{\frac{1}{2}ab\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{b'}{b}\right)\frac{\sin C'}{\sin C}$$

$$= 4\sin\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$$

Bài 200: Cho ΔABC có trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I. Biết GI vuông góc với đường phân giác trong của $\widehat{BCA}$. Chứng minh:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$$

Vẽ $GH \perp AC, GK \perp BC, ID \perp AC$

IG cắt AC tại L và cắt BC tại N

Ta có: $Dt(\Delta CLN) = 2Dt(\Delta LIC)$

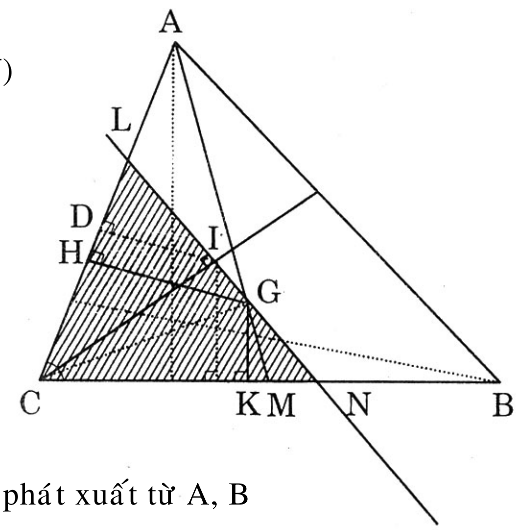
$= ID.LC = r.LC$ (1)

Mặt khác:

$Dt(\Delta CLN) = Dt(\Delta GLC) + Dt(\Delta GCN)$

$= \dfrac{1}{2}(GH.LC + GK.CN)$ (2)

Do ΔCLN cân nên $LC = CN$



Từ (1) và (2) ta được:

$$rLC = \frac{1}{2}LC(GH + GK)$$

$\Leftrightarrow 2r = GH + GK$

Gọi h_a, h_b là hai đường cao ΔABC phát xuất từ A, B

Ta có: $\dfrac{GK}{h_a} = \dfrac{MG}{MA} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{GH}{h_b} = \dfrac{1}{3}$

Do đó: $2r = \dfrac{1}{3}(h_a + h_b)$ (3)

Mà: $S = Dt(\Delta ABC) = pr = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b$

Do đó: $h_a = \frac{2pr}{a}$ và $h_b = \frac{2pr}{b}$

Từ (3) ta có: $2r = \frac{2}{3}pr\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}p\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b+c}{3}$$

BÀI TẬP

1. Cho ΔABC có ba cạnh là a, b, c. R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC. Chứng minh:

   a/ $(a-b)\text{cotg}\dfrac{C}{2}+(b-c)\text{cotg}\dfrac{A}{2}+(c-a)\text{cotg}\dfrac{B}{2}=0$

   b/ $1+\dfrac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$

   c/ Nếu $\text{cotg}\dfrac{A}{2},\text{cotg}\dfrac{B}{2},\text{cotg}\dfrac{C}{2}$ là cấp số cộng thì a, b, c cũng là cấp số cộng.

   d/ Diện tích $\Delta ABC = Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$

   e/ Nếu : $a^4 = b^4 + c^4$ thì ΔABC có 3 góc nhọn và $2\sin^2 A = \text{tg}B.\text{tg}C$

2. Nếu diện tích (ΔABC) = (c + a -b)(c + b -a) thì $\text{tg}C = \dfrac{8}{15}$

3. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Gọi A', B', C' là chân các đường cao vẽ từ A, B, C. Gọi S, R, r lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC. Gọi S', R', r' lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của $\Delta A'B'C'$. Chứng minh:

   a/ S' = 2ScosA.cosB.cosC

   b/ $R' = \dfrac{R}{2}$

   c/ r' = 2RcosA.cosB.cosC

4. ΔABC có ba cạnh a, b, c tạo một cấp số cộng. Với a < b < c

   Chứng minh :

   a/ ac = 6Rr

   b/ $\cos\dfrac{A-C}{2} = 2\sin\dfrac{B}{2}$

   c/ Công sai $d = \dfrac{3r}{2}\left(\text{tg}\dfrac{C}{2}-\text{tg}\dfrac{A}{2}\right)$

5. Cho ΔABC có ba góc A, B, C theo thứ tự tạo 1 cấp số nhân có công bội q = 2.

   Chứng minh:

   a/ $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

   b/ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\dfrac{5}{4}$