

BẢNG TRA CỨU CÔNG THỨC

TOÁN HỌC

DÙNG CHO HỌC SINH THPT

- * Giúp học sinh tra cứu nhanh công thức khi giải bài tập.
- * Giúp học sinh hệ thống được kiến thức.
- * Cung cấp thêm công thức cho học sinh khá giỏi.

Thiết kế & biên soạn
NGUYỄN DUY KHÔI

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

A. TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

I. TỌA ĐỘ VECTO' - TỌA ĐỘ ĐIỂM:

1. Tọa độ điểm: $M(x_M; y_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{i} + y_M \cdot \vec{j}$

2. Tọa độ vectơ:

$$\vec{a} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

3. Độ dài vectơ:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

4. Các hệ thức vectơ: Cho: $\vec{a} = (x_1; y_1); \vec{b} = (x_2; y_2)$

$$4.1. \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$4.2. \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$$

$$4.3. k \cdot \vec{a} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1) \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$4.4. \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad (x_2; y_2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

4.5. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k $\Leftrightarrow \vec{MA} = k \cdot \vec{MB}$

$$\vec{MA} = k \cdot \vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k} \end{cases} \quad (k \neq 1)$$

$$M \text{ là trung điểm } AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

4.6. Tích vô hướng:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Hệ quả:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

4.7. Các yếu tố của tam giác: Cho tam giác ABC.

a. Trọng tâm của tam giác: (Giao điểm của 3 đường trung tuyến)

$$G \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

b. Chu vi của tam giác: $P = AB + AC + BC$

c. Diện tích của tam giác:

$$\text{Ta có: } \vec{AB} = (x_1; y_1); \vec{AC} = (x_2; y_2)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

d. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

(Giao điểm của 3 đường trung trực)

Gọi I(a;b) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

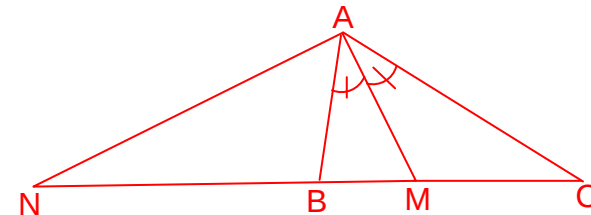
$$\text{Ta có: } AI = BI = CI \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên suy ra tọa độ tâm I(a;b)

e. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác:

(Giao điểm của 3 đường phân giác trong)

* Chân đường phân giác trong và ngoài:



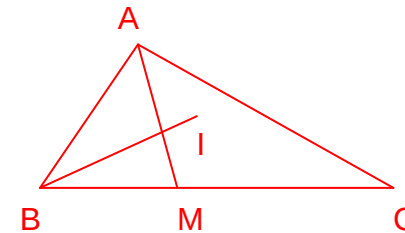
+ Gọi M là chân đường phân giác trong của góc A

$$\Rightarrow \vec{MB} = -\frac{AB}{AC} \vec{MC}$$

+ Gọi N là chân đường phân giác ngoài của góc A

$$\Rightarrow \vec{NB} = \frac{AB}{AC} \vec{NC}$$

* Phương pháp tìm tâm I đường tròn nội tiếp tam giác:



+ Gọi M là chân đường phân giác trong của góc A trong ΔABC

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm M

+ Gọi I là chân đường phân giác trong của góc B trong ΔABM

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Vector pháp tuyến – Vector chỉ phương của đường thẳng:



+ $\vec{n} = (A; B)$ ($\vec{n} \neq \vec{0}$) là VTPT của đường thẳng $(\Delta) \Leftrightarrow \vec{n} \perp (\Delta)$

+ $\vec{u} = (u_1; u_2)$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) là VTCP của đường thẳng $(\Delta) \Leftrightarrow \vec{u} // (\Delta)$

* Tính chất:

- Một đường thẳng có vô số VTPT và vô số VTCP.
- Nếu $\vec{n}$ là VTPT thì k. $\vec{n}$ cũng là VTPT
- Nếu $\vec{u}$ là VTCP thì k. $\vec{u}$ cũng là VTCP
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết:
 - . Một điểm $M(x_0; y_0)$ và một VTPT $\vec{n} = (A; B)$
 - . Một điểm $M(x_0; y_0)$ và một VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2)$

- Nếu đường thẳng có VTPT $\vec{n} = (A; B)$
thì VTCP là $\vec{u} = (B; -A)$ hay $\vec{u} = (-B; A)$

2. Phương trình của đường thẳng:

a. Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B)$

làm VTPT có phương trình: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

b. Ta khai triển, rút gọn phương trình trên và đặt $D = -Ax_0 - By_0$

ta được phương trình: $Ax + By + C = 0$

Phương trình trên là phương trình tổng quát của đường thẳng.

Khi đó đường thẳng có VTPT $\vec{n} = (A; B)$.

c. Đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2)$ làm VTCP có

phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

d. Đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2)$ làm VTCP có

phương trình chính tắc:
$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \quad (u_1; u_2 \neq 0)$$

Từ phương trình trên ta đưa về phương trình tổng quát:

$$u_2(x - x_0) - u_1(y - y_0) = 0$$

❖ Quy ước:

+ Nếu $u_1 = 0$ thì phương trình trở thành: $x - x_0 = 0$

Đường thẳng $x = x_0$ song song trục Oy

+ Nếu $u_2 = 0$ thì phương trình trở thành: $y - y_0 = 0$

Đường thẳng $y = y_0$ song song trục Ox

e. Phương trình đường thẳng AB với $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

f. Cho đường thẳng (Δ) có phương trình: $Ax + By + C = 0$

1. Nếu đường thẳng $(\Delta_1) // (\Delta)$ thì phương trình của đường thẳng (Δ_1) có dạng: $Ax + By + C_1 = 0$ ($C_1 \neq C$).

2. Nếu đường thẳng $(\Delta_2) \perp (\Delta)$ thì phương trình của đường thẳng (Δ_2) có dạng: $Bx - Ay + C_2 = 0$.

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG:

1. Cho hai đường thẳng: $(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

a. Nếu $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ thì (Δ_1) cắt (Δ_2)

b. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ thì $(\Delta_1) // (\Delta_2)$

c. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ thì $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$

Hoặc ta có thể xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

a. Nếu hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thì (Δ_1) cắt (Δ_2) tại điểm $I(x_0; y_0)$.

b. Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì $(\Delta_1) // (\Delta_2)$.

b. Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$.

2. Góc giữa hai đường thẳng $(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$

là góc nhọn giữa hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$; $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ (hoặc giữa hai vectơ chỉ phương) của hai đường thẳng ấy.

$$\cos \varphi = \left| \cos \left(\vec{n}_1; \vec{n}_2 \right) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

3. Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến $(\Delta): Ax + By + C = 0$:

$$d_{(M; (\Delta))} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $(\Delta): Ax + By + C = 0$ và

$(\Delta'): Ax + By + C' = 0$:

$$d_{((\Delta); (\Delta'))} = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

IV. ĐƯỜNG TRÒN:

1. Định nghĩa:

$$(C) = \{M(x; y) / IM = R\}$$

trong đó: (C): đường tròn;

I(a; b): tâm đường tròn; R (R > 0): bán kính đường tròn.

2. Phương trình đường tròn:

a. Phương trình chính tắc:

Đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R có phương trình chính tắc:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

b. Phương trình tổng quát:

Khai triển pt (1) ta được $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$

Đặt $c = a^2 + b^2 - R^2$, ta được phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) được gọi là pt tổng quát của đường tròn

với tâm I(a; b) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

* Lưu ý:

- Nếu đường tròn có tâm là gốc tọa độ O và bán kính R thì phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 = R^2$

- Điều kiện cần và đủ để pt (*) là pt đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0$

3. Tiếp tuyến của đường tròn:

a. Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ là đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và nhận $\overrightarrow{IM} = (x_0 - a; y_0 - b) = (A; B)$ làm VTPT

Khi đó, phương trình tiếp tuyến (Δ): $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

b. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R là:

$$d_{(I, (\Delta))} = R \Leftrightarrow \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$

c. Tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua $M(x_0; y_0)$ nằm ngoài (C):

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B)$ làm vector

pháp tuyến có phương trình: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

Áp dụng điều kiện để (Δ) tiếp xúc đường tròn: $d_{(I, (\Delta))} = R$

Giải phương trình trên $\Rightarrow \vec{n} = (A; B) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến.

4. Phương tích của một điểm đối với đường tròn:

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Phương tích của điểm M đối với đường tròn ký hiệu là $\mathcal{P}_{(M; (C))}$ và

$$\mathcal{P}_{(M; (C))} = IM^2 - R^2$$

$$\text{hay } \mathcal{P}_{(M; (C))} = f(x_0; y_0) = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c$$

1. $\mathcal{P}_{(M; (C))} > 0 \Leftrightarrow$ Điểm M nằm ngoài đường tròn.

2. $\mathcal{P}_{(M; (C))} = 0 \Leftrightarrow$ Điểm M nằm trên đường tròn.

3. $\mathcal{P}_{(M; (C))} < 0 \Leftrightarrow$ Điểm M nằm trong đường tròn.

V. ELIP:

1. Định nghĩa:

Trong mặt phẳng cho F_1 và F_2 cố định. Elip là tập hợp các điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai điểm F_1, F_2 bằng một hằng số lớn hơn khoảng cách giữa F_1, F_2 .

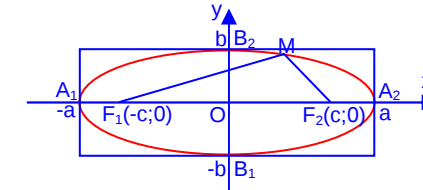
$$M \in (E) \Leftrightarrow F_1M + F_2M = 2a$$

Trong đó: F_1, F_2 : tiêu điểm của Elip.

$F_1F_2 = 2c$: tiêu cự của Elip.

F_1M, F_2M : bán kính qua tiêu điểm.

2. Phương trình chính tắc của Elip:



Chọn hệ trục Oxy sao cho: $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$

Phương trình chính tắc của Elip (E) là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{với } b^2 = a^2 - c^2; 0 < b < a)$$

3. Các yếu tố của Elip:

1. $a^2 = b^2 + c^2$ ($0 < b < a$)

2. Hai tiêu điểm: $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$

3. Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$

4. Cho $M(x_M; y_M) \in (E)$ thì các bán kính qua tiêu điểm:

$$\begin{cases} r_1 = F_1M = a + \frac{c}{a}x_M \\ r_2 = F_2M = a - \frac{c}{a}x_M \end{cases}$$

5. Tâm sai: $e = \frac{c}{a} < 1$

6. Đỉnh: $A_1(-a; 0); A_2(a; 0); B_1(0; -b); B_2(0; b)$.

7. Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$; Độ dài trục nhỏ $B_1B_2 = 2b$.

8. Phương trình HCN cơ sở: $x = \pm a; y = \pm b$.

9. Phương trình đường chuẩn $x = \pm \frac{a^2}{c}$

4. Lưu ý:

Chọn hệ trục Oxy sao cho: $F_1(0; -c)$ và $F_2(0; c)$

Phương trình của Elip (E) là: (không gọi là chính tắc)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{với } a^2 = b^2 - c^2; 0 < a < b)$$

5. Phương trình tiếp tuyến của Elip:

a. Phương trình tiếp tuyến của Elip tại điểm $M(x_0; y_0) \in (E)$:

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$$

b. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng (D) tiếp xúc với (E):

Cho (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng (D): $Ax + By + C = 0$.

Điều kiện cần và đủ để đường thẳng (D) tiếp xúc với (E):

$$a^2 \cdot A^2 + b^2 \cdot B^2 = C^2$$

c. Pt tiếp tuyến của Elip biết tiếp tuyến qua điểm $M(x_0; y_0)$ nằm ngoài (E):

Cách giải: Gọi (D) là đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B)$

(đk: $A^2 + B^2 > 0$) làm VTPT:

$$\Rightarrow \text{Pt (D): } A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 (*)$$

$$\Leftrightarrow Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$$

Áp dụng điều kiện tiếp xúc $\Rightarrow \vec{n} = (A; B)$

Thế A và B vào pt (*) được pt tiếp tuyến của Elip.

VI. HYPERBOL

1. Định nghĩa:

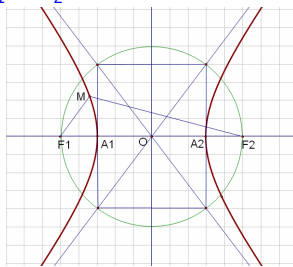
Trong mặt phẳng cho F_1 và F_2 cố định, $F_1F_2 = 2c > 0$.

$$M \in (H) \Leftrightarrow |F_1M - F_2M| = 2a$$

Trong đó: F_1, F_2 : tiêu điểm của Hyperbol.

$$F_1F_2 = 2c: \text{tiêu cự của Hyperbol.}$$

$$F_1M, F_2M: \text{bán kính qua tiêu điểm.}$$



2. Phương trình chính tắc của Hyperbol:

Chọn hệ trục Oxy sao cho: $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$

Phương trình chính tắc của Hyperbol (H) là:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{với } b^2 = c^2 - a^2; 0 < a < c)$$

3. Các yếu tố của Hyperbol:

$$1. c^2 = a^2 + b^2 \quad (0 < a < c)$$

$$2. \text{Hai tiêu điểm: } F_1(-c; 0) \text{ và } F_2(c; 0)$$

$$3. \text{Tiêu cự: } F_1F_2 = 2c$$

$$4. \text{Bán kính qua tiêu điểm: Cho } M(x_M; y_M) \in (H)$$

$$\text{Nếu } x_M > 0 \text{ thì các bán kính qua tiêu điểm: } \begin{cases} F_1M = a + \frac{c}{a}x_M \\ F_2M = -a + \frac{c}{a}x_M \end{cases}$$

$$\text{Nếu } x_M < 0 \text{ thì các bán kính qua tiêu điểm: } \begin{cases} F_1M = -a - \frac{c}{a}x_M \\ F_2M = a - \frac{c}{a}x_M \end{cases}$$

$$5. \text{Tâm sai: } e = \frac{c}{a} > 1$$

$$6. \text{Đỉnh: } A_1(-a; 0); A_2(a; 0).$$

$$7. \text{Độ dài trục thực: } A_1A_2 = 2a; \text{Độ dài trục ảo } B_1B_2 = 2b.$$

$$8. \text{Phương trình HCN cơ sở: } x = \pm a; y = \pm b.$$

$$9. \text{Phương trình tiệm cận của (H): } y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$10. \text{Phương trình đường chuẩn } x = \pm \frac{a^2}{c}$$

* Lưu ý:

Chọn hệ trục Oxy sao cho: $F_1(0; -c)$ và $F_2(0; c)$

$$\text{Phương trình của (H')} \text{ là: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{với } a^2 = c^2 - b^2; c > b)$$

(gọi (H') là Hyperbol liên hợp của (H))

5. Phương trình tiếp tuyến của Hyperbol:

a. Pt tiếp tuyến của Hyperbol tại điểm $M(x_0; y_0) \in (H)$:

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$$

b. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng (D) tiếp xúc với (H):

Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng (D): $Ax + By + C = 0$.

Điều kiện cần và đủ để đường thẳng (D) tiếp xúc với (H):

$$a^2 \cdot A^2 - b^2 \cdot B^2 = C^2$$

c. Pt tiếp tuyến của Hyperbol biết tiếp tuyến qua điểm $M(x_0; y_0) \notin (H)$:

Cách giải: Gọi (D) là đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B)$

(đk: $A^2 + B^2 > 0$) làm VTPT:

$$\Rightarrow \text{Pt (D): } A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 (*)$$

$$\Leftrightarrow Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$$

Áp dụng điều kiện tiếp xúc $\Rightarrow \vec{n} = (A; B)$

Thế A và B vào pt (*) được pt tiếp tuyến của Hyperbol.

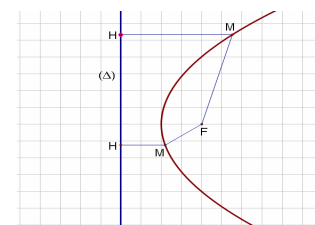
VII. PARABOL

1. Định nghĩa:

Trong mặt phẳng cho đường thẳng Δ cố định và một điểm F cố định. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF = d(M; \Delta)$ gọi là 1 parabol

$$(P) = \{M(x; y) | FM = d_{(M, \Delta)}\}$$

- F: tiêu điểm
- Δ : đường chuẩn của parabol



2. Phương trình chính tắc của Parabol:

- Pt chính tắc của parabol: $y^2 = 2px$ - Tiêu điểm: $F(\frac{p}{2}; 0)$ (p: tham số tiêu) - Pt đường chuẩn Δ: $x = -\frac{p}{2}$ - Bán kính qua tiêu điểm: $FM = x_M + \frac{p}{2}$ - P tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0) \in (P)$: $y_0 y = p(x_0 + x)$ (P) tiếp xúc đt $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 > 0$) $\Leftrightarrow pB^2 = 2AC$	
- Pt (dạng 2) của parabol: $y^2 = -2px$ - Tiêu điểm: $F(-\frac{p}{2}; 0)$ (p: tham số tiêu) - Pt đường chuẩn Δ: $x = \frac{p}{2}$ - Bán kính qua tiêu điểm: $FM = -x_M + \frac{p}{2}$ - Pt tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0) \in (P)$: $y_0 y = -p(x_0 + x)$ (P) tiếp xúc đt $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 > 0$) $\Leftrightarrow pB^2 = -2AC$	
- Pt (dạng 3) của parabol: $x^2 = 2py$ - Tiêu điểm: $F(0; \frac{p}{2})$ (p: tham số tiêu) - Pt đường chuẩn Δ: $y = -\frac{p}{2}$ - Bán kính qua tiêu điểm: $FM = y_M + \frac{p}{2}$ - Pt tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0) \in (P)$: $x_0 x = p(y_0 + y)$ (P) tiếp xúc đt $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 > 0$) $\Leftrightarrow pA^2 = 2BC$	
- Pt (dạng 4) của parabol: $x^2 = -2py$ - Tiêu điểm: $F(0; -\frac{p}{2})$ (p: tham số tiêu) - Pt đường chuẩn Δ: $y = \frac{p}{2}$ - Bán kính qua tiêu điểm: $FM = -y_M + \frac{p}{2}$ - Pt tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0) \in (P)$: $x_0 x = -p(y_0 + y)$ (P) tiếp xúc đt $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 > 0$) $\Leftrightarrow pA^2 = -2BC$	

3. Tâm sai của Parabol: $e = \frac{MF}{d(M; \Delta)} = 1$

B. TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. CÁC TÍNH CHẤT VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1. Cộng hai vectơ:

a. Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b. Quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

2. I là trung điểm AB:

a. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

b. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, $\forall M$

3. Trọng tâm G của tam giác ABC: (Giao điểm của 3 đường trung tuyến)

a. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

b. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, $\forall M$

4. Trọng tâm G của tứ diện ABCD:

a. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

b. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$, $\forall M$

II. TỌA ĐỘ ĐIỂM – VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ trục tọa độ Đề các vuông góc:

$\vec{i} = (1; 0; 0)$; $\vec{j} = (0; 1; 0)$; $\vec{k} = (0; 0; 1)$: gọi là vectơ đơn vị.

Độ dài $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

2. Tọa độ vectơ - tọa độ điểm:

$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1) \Leftrightarrow \vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}$

$M(x_0; y_0; z_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k}$

Cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

3. Các tính chất:

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$

và $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$

1) Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$

2) Tổng hiệu hai vectơ: $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$

3) Tích số thực với 1 vectơ: $k \cdot \vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$

4) Độ dài vectơ:

$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

5) Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k: $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$

$$\text{a. Tọa độ điểm M} \begin{cases} x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k} \\ z_M = \frac{z_A - k \cdot z_B}{1 - k} \end{cases} \quad (k \neq 1)$$

$$\text{b. M là trung điểm AB:} \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

6) Hai vector cùng phương:

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x_1 : x_2 = y_1 : y_2 = z_1 : z_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2$$

7) Tích vô hướng của hai vector: (là một số thực)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

8. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

9) Tọa độ trọng tâm tứ diện ABCD:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$$

10) Hình chiếu của $M(x_0; y_0; z_0)$ lên các mặt và các trục tọa độ:

a. M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox thì $M_1(x_0; 0; 0)$

M_2 là hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy thì $M_2(0; y_0; 0)$

M_3 là hình chiếu vuông góc của M lên trục Oz thì $M_3(0; 0; z_0)$

b. M_1' là hình chiếu vuông góc của M lên mp (Oxy) thì $M_1'(x_0; y_0; 0)$

M_2' là hình chiếu vuông góc của M lên mp (Oyz) thì $M_2'(0; y_0; z_0)$

M_3' là hình chiếu vuông góc của M lên mp (Oxz) thì $M_3'(x_0; 0; z_0)$

III. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR:

1. Định nghĩa:

Tích có hướng của 2 vector $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ là một vector

ký hiệu $[\vec{a}, \vec{b}]$ có tọa độ xác định bởi công thức:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

2. Các tính chất:

$$1. [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ \& \& b cùng phương}$$

$$2. \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{a}; \vec{n} \perp \vec{b}$$

$$3. |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

3. Các ứng dụng:

$$\text{a. Diện tích } \Delta ABC : S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \frac{1}{2} |[\vec{BA}, \vec{BC}]| = \dots$$

b. Điều kiện cần và đủ để ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$$

Hệ quả: Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành một tứ diện

$$\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$$

c. Thể tích:

$$* \text{ Thể tích hình hộp } ABCD.A'B'C'D' : V = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$$

* Thể tích tứ diện ABCD:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} |[\vec{BA}, \vec{BC}] \cdot \vec{BD}| = \dots$$

$$* \text{ Độ dài đường cao của tứ diện: } AH = \frac{3 \cdot V_{ABCD}}{S_{ABCD}}$$

III. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG:

a. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{n} = (A; B; C) \neq \vec{0}$ làm vector pháp tuyến:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

b. Ta khai triển, rút gọn phương trình (1) và đặt $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

ta được phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$

Phương trình (2) được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Khi đó mặt phẳng có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$

c. Hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng thì vector pháp tuyến của mặt phẳng là: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

(Hai vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ còn gọi là cặp vector chỉ phương của mặt phẳng)

d. Mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận 2 vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vector chỉ phương

$$\text{có phương trình tham số: } \begin{cases} x = x_0 + a_1 t_1 + b_1 t_2 \\ y = y_0 + a_2 t_1 + b_2 t_2 \\ z = z_0 + a_3 t_1 + b_3 t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

e. Các phương trình mặt phẳng dạng đặc biệt:

1) Mặt phẳng Oxy; Oxz; Oyz có ph trình lần lượt là: $z = 0; y = 0; x = 0$.

2) Mặt phẳng song song với mặt phẳng Oxy hoặc Oxz hoặc Oyz có dạng phương trình lần lượt là: $z + D = 0$ hoặc $y + D = 0$ hoặc $x + D = 0$.

3) Mặt phẳng chứa các trục Ox hoặc Oy hoặc Oz có dạng phương trình lần lượt là: $By + Cz = 0$ hoặc $Ax + Cz = 0$ hoặc $Ax + By = 0$.

4) Mặt phẳng song song với các trục Ox hoặc Oy hoặc Oz có dạng phương trình lần lượt là: $By + Cz + D = 0$ hoặc $Ax + Cz + D = 0$ hoặc $Ax + By + D = 0$.

5) Nếu mp (P)//(Q): $Ax + By + Cz + D = 0$ thì phương trình mp (P) có dạng:

$$Ax + By + Cz + D' = 0$$

6) Mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ có phương trình:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (\text{Gọi là phương trình mặt phẳng chắn các trục tọa độ})$$

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG:

Cho hai mặt phẳng: (P): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(Q): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

1. Nếu $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ hoặc $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ hoặc $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ thì (P) cắt (Q).

2. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ thì (P) // (Q).

3. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ thì (P) $\equiv$ (Q).

CHÙM MẶT PHẪNG:

Cho 2 mặt phẳng (P): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; (Q): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ cắt nhau theo giao tuyến a.

1. Định nghĩa: Tập hợp các mặt phẳng trong không gian cùng qua giao tuyến a của 2 mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là chùm mặt phẳng.

2. Định lý: Mọi mặt phẳng (R) thuộc chùm mặt phẳng cơ sở là (P), (Q) luôn có dạng phương trình:

$$m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (m^2 + n^2 > 0)$$

V. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình tổng quát:

Cho 2 mp (P): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và (Q): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ cắt nhau theo giao tuyến (Δ) là đường thẳng có phương trình tổng quát:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (\text{ĐK: } A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2)$$

Khi đó đường thẳng (Δ) có $\begin{cases} (\Delta) \perp \vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1) \\ (\Delta) \perp \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2) \end{cases}$

Nên đường thẳng (Δ) có VTCP: $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$

2. Phương trình tham số:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm VTCP có

$$\text{phương trình tham số: } \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \\ z = z_0 + u_3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

3. Phương trình chính tắc:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm VTCP có

$$\text{phương trình chính tắc: } \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad (3)$$

$$\text{Từ ph trình (3) ta đưa về phương trình tổng quát: } \begin{cases} \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} & (a) \\ \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{z - z_0}{u_3} & (b) \end{cases}$$

Phương trình (a) là phương trình mp (P) song song với trục Oz

Phương trình (b) là phương trình mp (Q) song song với trục Oy

❖ Quy ước:

$$+ \text{ Nếu } u_1 = 0 \text{ thì phương trình (3) trở thành: } \begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } u_1 = 0 \text{ và } u_2 = 0 \text{ thì phương trình (3) trở thành: } \begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$$

4. Phương trình đường thẳng AB với $A(x_A; y_A; z_A)$; $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \quad (4)$$

❖ Chú ý: Mp (α) chứa đường thẳng (Δ): $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

thì phương trình mặt phẳng (α) có dạng:

$$m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (\text{ĐK: } m^2 + n^2 > 0).$$

VI. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng:

Cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Khoảng cách từ M_0 đến mặt phẳng (P):

$$d_{(M_0, (P))} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và đt (Δ) đi qua điểm $M(x_1; y_1; z_1)$ có VTCP $\vec{u}$

Khoảng cách từ M_0 đến đường thẳng (Δ):

$$d_{(M_0, (\Delta))} = \frac{|[\vec{M_0M}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng: (Δ) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có VTCP $\vec{u}$

(Δ') đi qua điểm $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$ có VTCP $\vec{u}'$

a. Nếu hai đường thẳng (Δ) và (Δ') chéo nhau: Khoảng cách giữa

$$\text{hai đt } (\Delta) \text{ và } (\Delta'): d_{((\Delta), (\Delta'))} = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \vec{MM'}|}{|[\vec{u}, \vec{u}']|}$$

b. Nếu hai đường thẳng (Δ) và (Δ') song song là khoảng cách từ

$$\text{điểm } M' \text{ trên } (\Delta') \text{ đến đường thẳng } (\Delta): d_{(M', (\Delta))} = \frac{|[\vec{MM'}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$$

$$\text{Hay khoảng cách từ } M \text{ trên } (\Delta) \text{ đến đường thẳng } (\Delta'): d_{(M, (\Delta'))} = \frac{|[\vec{MM'}, \vec{u}']|}{|\vec{u}'|}$$

VII. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng:

Cho 2 đường thẳng (Δ) : $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$ có VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$

và đường thẳng (Δ') : $\frac{x-x'_0}{u'_1} = \frac{y-y'_0}{u'_2} = \frac{z-z'_0}{u'_3}$ có VTCP $\vec{u'} = (u'_1; u'_2; u'_3)$

Góc giữa hai đ.thẳng là góc nhọn tạo bởi hai VTCP của hai đ.thẳng đó:

$$\cos(\Delta; \Delta') = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u'}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u'}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u'}|} = \frac{|u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}}$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Cho đường thẳng (Δ) : $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$ có VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$

và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$.

Gọi Φ là góc giữa đ.thẳng và mặt phẳng thì Φ là góc phụ của góc tạo bởi

VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ của đường thẳng với VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ của mp:

$$\sin \Phi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|u_1 A + u_2 B + u_3 C|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. Góc giữa hai mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng (P): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ có VTPT $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$

và mặt phẳng (Q): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có VTPT $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc nhọn tạo bởi hai VTPT của hai mp đó:

$$\cos(P; Q) = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

VIII. MẶT CẦU

1. ĐỊNH NGHĨA: $(S) = \{M(x; y; z) / IM = R\}$

trong đó: (S): mặt cầu; I(a; b; c): tâm mặt cầu; R (R > 0): bán kính mặt cầu.

2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU:

a. Phương trình chính tắc:

Mặt cầu (S) tâm I(a; b; c), bán kính R có phương trình chính tắc:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1)$$

b. Phương trình tổng quát:

Khai triển pt (1) ta được:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$$

Đặt $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$, ta được phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (2)$$

Pt (2) được gọi là pt tổng quát của mặt cầu

với tâm I(a; b; c) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

* Lưu ý:

- Nếu mặt cầu có tâm là gốc tọa độ O và bán kính R thì pt mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

- Điều kiện cần và đủ để pt (2) là pt mặt cầu $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

3. MẶT PHẪNG TIẾP XÚC VỚI MẶT CẦU: (tiếp diện của mặt cầu)

a. Tiếp diện của mặt cầu (S) tại $M(x_0; y_0; z_0) \in (S)$ là mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{IM} = (x_0 - a; y_0 - b; z_0 - c) = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến. Khi đó, phương trình mặt phẳng (P):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

b. Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm I (a; b; c), bán kính R là:

$$d_{(I, (P))} = R \Leftrightarrow \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R \quad (4)$$

4. GIAO CỦA MẶT PHẪNG VỚI MẶT CẦU:

Cho mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và

mặt cầu (S): $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Sự tương giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) là:

a. $d_{(I, (P))} > R \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

b. $d_{(I, (P))} = R \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu (S).

c. $d_{(I, (P))} < R \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).

Khi đó, giao tuyến của $(P) \cap (S) = (C)$ là 1 đường tròn có phương trình

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \end{cases} \quad (5)$$

* Phương pháp xác định tâm H và bán kính r đường tròn (C):

- Viết phương trình đ. thẳng (Δ) đi qua tâm I và vuông góc với mp (P)

- Tâm H của đường tròn (C) là giao điểm của (Δ) và (P)

- Bán kính r của đường tròn (C): $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$ hay $r = \sqrt{R^2 - d_{(I, (P))}^2}$

DIỆN TÍCH – THỂ TÍCH

I. Các công thức trong hình học phẳng:

1. Diện tích:

1.1. Diện tích các đa giác đặc biệt:

$$\bullet \text{ Diện tích tam giác đều cạnh } a: S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$(\text{đường cao } h = \frac{a\sqrt{3}}{2})$$

$$\bullet \text{ Diện tích tam giác vuông cân cạnh } a: S = \frac{a^2}{2}$$

$$\bullet \text{ Diện tích tam giác ABC vuông tại A: } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

• Diện tích tam giác ABC cân tại A có H là trung điểm cạnh BC:

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

- Diện tích hình vuông cạnh a : $S = a^2$
- Diện tích hình thoi ABCD: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

1.2. Diện tích tam giác thường:

- Các ký hiệu trong $\triangle ABC$:
 $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$
 m_a , m_b , m_c : độ dài trung tuyến ứng với đỉnh A, B, C
 h_a , h_b , h_c : Độ dài đường cao ứng với đỉnh A, B, C

$$P = \frac{a + b + c}{2} : \text{nửa chu vi } \triangle ABC$$

S: diện tích tam giác

R, r: bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\triangle ABC$.

$$1. S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$2. S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

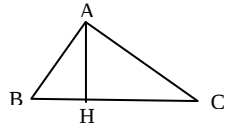
$$3. S = \frac{abc}{4R} \quad (R: \text{bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC)$$

$$4. S = p \cdot r \quad (r: \text{bán kính đường tròn nội tiếp tam giác } ABC)$$

$$5. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{Công thức Hê – rông})$$

2. Các hệ thức trong tam giác vuông:

Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao:



$$1. AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$2. \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$3. AB^2 = BH \cdot BC$$

$$4. AC^2 = CH \cdot CB$$

$$5. AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$6. AH^2 = HB \cdot HC$$

3. Các hệ thức trong tam giác thường:

- Định lý Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

$$\text{Hệ quả: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \dots$$

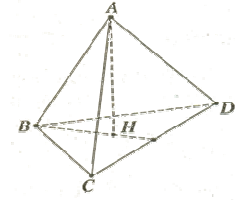
- Định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

- Công thức trung tuyến: $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

II. Diện tích của hình chóp – Thể tích của khối chóp:

1. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần:

- Tổng diện tích tất cả các mặt bên của một hình chóp được gọi là *diện tích xung quanh* của hình chóp đó.
- Tổng diện tích đáy và diện tích xung quanh của một hình chóp gọi là *diện tích toàn phần* của hình chóp đó.
- Nếu đáy của hình chóp là đa giác đều n cạnh thì diện tích xung quanh bằng tích n với diện tích mặt bên.



2. Thể tích của khối chóp:

- Thể tích của một khối chóp là: $V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h$ (h là chiều cao của khối chóp).

- **Đặc biệt:** Cho tứ diện SABC. Trên các nửa đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C'. Gọi V_{SABC} , $V_{SA'B'C'}$ lần lượt là thể tích của các tứ diện SABC và SA'B'C'. Ta có:

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

III. Diện tích của hình chóp cắt – Thể tích của khối chóp cắt.

1. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần:

- Tổng diện tích tất cả các mặt bên của một hình chóp cắt được gọi là *diện tích xung quanh* của hình chóp cắt đó.
- Tổng diện tích hai đáy và diện tích xung quanh của một hình chóp cắt là *diện tích toàn phần* của hình chóp cắt đó.

2. Thể tích của khối chóp cắt:

- Thể tích của một khối chóp cắt là:

$$V = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) \cdot h$$

(h là chiều cao; S_1 , S_2 là diện tích hai đáy của khối chóp cắt).

IV. Diện tích của hình lăng trụ – Thể tích của khối lăng trụ:

1. Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích 3 kích thước của nó.

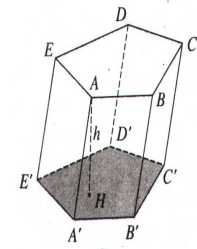
$$V = a \cdot b \cdot c$$

2. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao h là:

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

3. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần:

- Tổng diện tích tất cả các mặt bên của một hình lăng trụ được gọi là *diện tích xung quanh* của hình lăng trụ đó.
- Tổng diện tích hai đáy và diện tích xung quanh của một hình lăng trụ là *diện tích toàn phần* của hình lăng trụ đó.

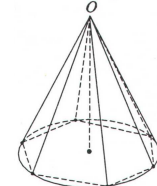


V. Diện tích xung quanh của hình nón – Thể tích của khối nón:

1. Diện tích xung quanh của hình nón:

$$S_{xq} = \pi r l$$

(r : bán kính đường tròn đáy; l : đường sinh)



✓ **Lưu ý:** Ta gọi tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là diện tích toàn phần của hình nón.

2. **Thể tích của khối nón:**

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (h : \text{đường cao})$$

VI. Diện tích xung quanh của hình trụ – Thể tích của khối trụ:

1. **Diện tích xung quanh của hình trụ:**

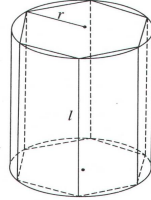
$$S_{xq} = 2\pi r l$$

(r : bán kính đường tròn đáy ; l : đường sinh)

✓ **Lưu ý:** Ta gọi tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy là diện tích toàn phần của hình trụ.

2. **Thể tích của khối trụ:**

$$V = \pi r^2 h \quad (h : \text{đường cao})$$



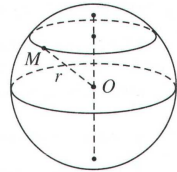
VII. Diện tích của mặt cầu – Thể tích của khối cầu:

1. **Mặt cầu bán kính r có diện tích là:**

$$S = 4\pi r^2$$

2. **Khối cầu bán kính r có thể tích là:**

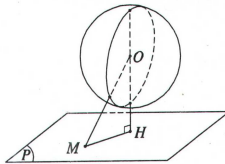
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



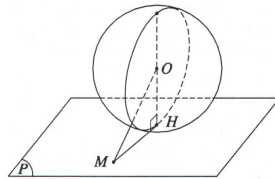
3. **Giao của mặt cầu và mặt phẳng:**

Cho mặt cầu $S(O ; r)$ và mặt phẳng (P) . Gọi h là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) .

- Khi $h > r$: (P) không có điểm chung với mặt cầu $S(O ; r)$

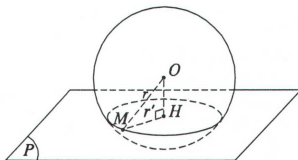


- Khi $h = r$: (P) tiếp xúc với $S(O ; r)$ tại H . (P) được gọi là tiếp diện và H gọi là tiếp điểm.

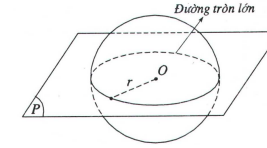


- Khi $h < r$: Giao tuyến của (P) và $S(O ; r)$ là đường tròn $C(H ; r')$ tâm H , bán

$$\text{kính } r' = \sqrt{r^2 - h^2}$$



- Khi $h = 0$ thì (P) được gọi là mặt phẳng kính. Khi đó r lớn nhất và $C(H ; r)$ được gọi là đường tròn lớn của mặt cầu.



HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TỔNG HỢP

I. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU:

1. Các khái niệm mở đầu

- Các khái niệm cơ bản là: “điểm”, “đường thẳng” và “mặt phẳng”.
- Để biểu diễn một phần của mặt phẳng, người ta dùng một hình bình hành. Ký hiệu: (P) , (Q) , ... hay (α) , (β) , ...
- Mỗi đường thẳng, mỗi mặt phẳng là một tập hợp điểm.

Cách ký hiệu:

$$A \in (\alpha), B \notin (\alpha)$$

$$C \in a, A \notin a, B \notin a$$

$$a \subset (\alpha), b \not\subset (\alpha)$$

2. Các tiên đề của hình học không gian

- Tiên đề 1:** Qua ba điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
- Tiên đề 2:** Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng có hai điểm chung phân biệt thì đường thẳng hoàn toàn nằm trên mặt phẳng.
- Tiên đề 3:** Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có điểm chung khác nữa.
- Tiên đề 4:** Có ít nhất bốn điểm không thuộc cùng một mặt phẳng.

Chú thích

* Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng ký hiệu là $mp(ABC)$ hay (ABC) .

* Những điểm thuộc một mặt phẳng gọi là những điểm *đồng phẳng*. Những điểm không thuộc một mặt phẳng gọi là những điểm *không đồng phẳng*.

* Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung gọi là *giao tuyến* của hai mặt phẳng đó.

* Một mặt phẳng được xác định (duy nhất) bởi: Ba điểm không thẳng hàng, hoặc một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó, hoặc hai đường thẳng cắt nhau hoặc hai đường thẳng song song.

3. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

+ Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.

+ Đường thẳng đi qua hai điểm chung chính là giao tuyến.

4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

5. Tìm giao điểm của một đường thẳng với một mặt phẳng

Giả sử đường thẳng d cắt mặt phẳng

(a). Tìm giao điểm của d và (α) .

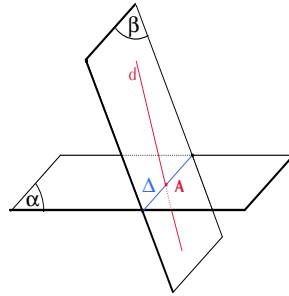
+ Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa đường

thẳng d và cắt (α) theo giao tuyến Δ .

+ Trong mặt phẳng (β) , hai đường thẳng

d và Δ cắt nhau tại A .

$$+ \begin{cases} A \in d \\ A \in \Delta \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow A = d \cap (\alpha)$$



6. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Để chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy:

+ Xác định giao điểm I của a và b .

+ Tìm hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến c .

+ Chứng minh rằng điểm I thuộc đường thẳng c .

II. QUAN HỆ SONG SONG:

$$1. a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \emptyset \end{cases}$$

$$2. a, b \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow a \cap b = M$$

$$3. a \equiv b \Leftrightarrow (a \cap b = a), (a \cap b = b)$$

$$4. a, b \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset (\alpha), b \not\subset (\alpha) \\ a \cap b = \emptyset \end{cases}$$

5. Các tính chất:

- Qua điểm A cho trước không thuộc đường thẳng b cho trước, vẽ được duy nhất một đường thẳng a song song với b .
- Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc song song.
- Nếu có hai giao tuyến cắt nhau thì giao tuyến thứ ba phải đồng quy tại điểm đó. Nếu có hai giao tuyến song song thì cả ba giao tuyến phải song song với nhau.
- Hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

II. QUAN HỆ VUÔNG GÓC:

$$1. \begin{cases} d \perp (P) \\ \Delta \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp \Delta$$

$$2. \begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \text{ cắt } b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

$$3. \begin{cases} a // b \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp (P)$$

$$5. \begin{cases} (P) \perp d \\ (Q) \perp d \\ (P) \neq (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q)$$

$$7. \begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b \\ (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a // (P)$$

$$9. \begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (R)$$

$$4. \begin{cases} (P) // (Q) \\ d \perp (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp (Q)$$

$$6. \begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow a // b$$

$$8. \begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \\ a \subset (P) \\ a \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$$

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

1. Các hằng đẳng thức:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

2. Hai đa thức đồng nhất:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$f(x) \equiv g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a_i = b_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

3. Tính đơn điệu của hàm số:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$

* Nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì f **hỗ tăng (đồng biến)** trên $(a; b)$.

* Nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ thì f **hỗ giảm (nghịch biến)** trên $(a; b)$.

4. Tính chẵn, lẻ của hàm số:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

$$* \text{ Nếu } \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \text{ thì hàm số chẵn.}$$

Đồ thị hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng.

$$* \text{ Nếu } \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \text{ thì hàm số lẻ.}$$

Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

* Chú ý:

1. Nếu D là tập đối xứng thì $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

2. Nếu D không là tập đối xứng thì hàm số không chẵn, không lẻ.

3. Nếu $\exists x_0 \in D: f(x_0) \neq \pm f(x_0)$ thì hàm số không chẵn, không lẻ.

5. **Công thức tịnh tiến** hệ trục Oxy về hệ trục mới IX'Y' với gốc tọa độ mới

$$I(x_0, y_0). \text{ Công thức đổi hệ trục: } \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

NHỊ THỨC BẬC NHẤT $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax + b	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

TAM THỨC BẬC HAI

1. PT bậc hai 1 ẩn số: $ax^2 + bx + c = 0$ (*) ($a \neq 0$)

Công thức nghiệm: $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$)

Biệt thức	Nghiệm của phương trình (*)
$\Delta < 0$	Vô nghiệm
$\Delta = 0$	nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

2. Định lý Viet và áp dụng:

* Tổng và tích hai nghiệm - Định lý Viet: ($\Delta \geq 0$)

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

* Nếu phương trình (*) có dạng: $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$

* Nếu phương trình (*) có dạng: $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$

* Tìm u và v biết $u + v = S, u \cdot v = P$. Nếu $S^2 - 4P \geq 0$ thì

u và v là nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$

* Biểu diễn biểu thức qua S và P:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S(S^2 - 3P)$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

* Tìm hệ thức độc lập đối với tham số giữa các nghiệm:

- Áp dụng định lý Viet tính S, P theo tham số.

- Khử tham số, tìm hệ thức giữa S và P.

Chú ý: Định lý Viet chỉ là điều kiện cần, do đó phải tìm điều kiện để phương trình có 2 nghiệm trước.

* **Dấu các nghiệm của phương trình bậc hai:**

$x_1 < 0 < x_2$	$P < 0$
$0 < x_1 \leq x_2$	$\Delta \geq 0, P > 0, S > 0$
$x_1 \leq x_2 < 0$	$\Delta \geq 0, P > 0, S < 0$
(*) có đúng 1 nghiệm dương	$ac < 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$
(*) có đúng 1 nghiệm âm	$ac < 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$
Lưu ý: nếu a có chứa tham số thì xét thêm trường hợp a = 0	

3. Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

* $\Delta < 0$: $f(x)$ cùng dấu với a, $\forall x$

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	cùng dấu với a	

* $\Delta = 0$: $f(x)$ cùng dấu với a, $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	cùng dấu với a	0	cùng dấu với a

* $\Delta > 0$: $f(x)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$)

X	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$	
f(x)	cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a

* Tam thức không đổi dấu trên R:

$$f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

Lưu ý: nếu a có chứa tham số thì xét thêm trường hợp a = 0.

$$* \text{ Hệ quả: } f(x) > 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) < 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

Lưu ý: nếu a có chứa tham số thì xét thêm trường hợp a = 0.

4. So sánh số α, β ($\alpha < \beta$) với nghiệm của tam thức bậc hai:

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($x_1 < x_2$)

• $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(\alpha) < 0$

$$\bullet \alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases} \quad \bullet x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases} \quad \bullet x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases} \quad \bullet x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \alpha < \beta < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ \frac{S}{2} - \beta > 0 \end{cases} \quad \bullet x_1 < x_2 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases}$$

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Giá trị lượng giác sin, cosin, tang và cotang:

a. Định nghĩa:

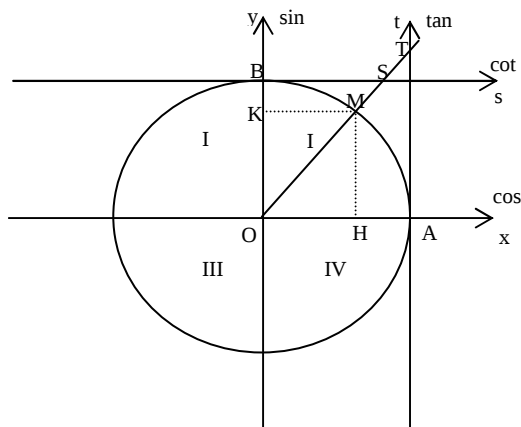
Lấy điểm M(x; y) trên đường tròn lượng giác để (OA; OM) = α

$$\cos \alpha = x = OH$$

$$\sin \alpha = y = OK$$

$$\tan \alpha = \frac{AT}{OS} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\cot \alpha = \frac{OS}{AT} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$$



b. Tính chất:

$$1) -1 \leq \cos \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$2) \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha; \quad \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$$

$$3) \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$$

c. Dấu của các giá trị lượng giác:

	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

2. Các hệ thức lượng giác cơ bản:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \quad \left(x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

3. Cung liên kết:

a. Cung đối nhau:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

b. Cung bù nhau:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

c. Cung phụ nhau:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

d. Cung hơn kém nhau π :

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

4. Các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$
cot α	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

5. Công thức cộng: Cho a, b là các số thực có:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b} \quad \left(\begin{array}{l} a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ a \pm b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array} ; k \in \mathbb{Z} \right)$$

6. Công thức nhân đôi:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2}{\cot a - \tan a}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a} = \frac{\cot a - \tan a}{2}$$

7. Công thức nhân ba:

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad \sin 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a} \quad \cot 3a = \frac{\cot^2 a - 3 \cot a}{3 \cot^2 a - 1}$$

8. Công thức hạ bậc:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{(1 - \cos 2a)^2}{\sin^2 2a}$$

9. Biểu diễn $\cos a$, $\sin a$, $\tan a$ qua $\tan \frac{a}{2}$. Đặt $t = \tan \frac{a}{2}$.

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin a = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan a = \frac{2t}{1 - t^2}$$

10. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

$$\tan a \cdot \tan b = \frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b}$$

11. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a \pm \tan b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cdot \cos b} \quad \cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

12. Một số công thức đặc biệt:

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \quad 1 + \sin a = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2} \quad 1 - \sin a = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)$$

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \quad \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

$$\cot \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 - \cos a} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}$$

$$\sqrt{1 \pm \sin 2a} = |\sin a \pm \cos a|$$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. Phương trình lượng giác cơ bản:

$$\begin{array}{ll} \sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} & \cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} \\ \tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi & \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \end{array}$$

1. Ta thường gặp dạng cơ bản:

$$\sin x = m; \cos x = m; \tan x = m; \cot x = m \quad (\forall m \in \mathbb{R})$$

a. Giải pt: $\sin x = m$ (1)

• Nếu $|m| > 1$ thì pt (1) vô nghiệm.

• Nếu $|m| \leq 1$ thì pt (1):

$$\Leftrightarrow \sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b. Giải pt: $\cos x = m$ (2)

• Nếu $|m| > 1$ thì pt (2) vô nghiệm.

• Nếu $|m| \leq 1$ thì pt (2):

$$\Leftrightarrow \cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c. Giải pt: $\tan x = m$ (3) (pt luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$)

$$(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

d. Giải pt: $\cot x = m$ (4) (pt luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$)

$$(4) \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Các trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

II. Phương trình lượng giác thường gặp:

1. Phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác:

$$a.\sin^2 x + b.\sin x + c = 0 \quad (1)$$

$$a.\cos^2 x + b.\cos x + c = 0 \quad (2) \quad (a \neq 0)$$

$$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = 0 \quad (3)$$

$$a.\cot^2 x + b.\cot x + c = 0 \quad (4)$$

Cách giải:

Đặt ẩn phụ: $t = \sin x$ ($t = \cos x$; $t = \tan x$; $t = \cot x$)

Ta được phương trình: $at^2 + bt + c = 0$

Giải phương trình tìm t (đối với pt (1), (2) thì $-1 \leq t \leq 1$), rồi suy ra x .

2. Phương trình bậc nhất theo $\sin x$ và $\cos x$:

Có dạng: $a.\sin x + b.\cos x = c$ (*) ($a \neq 0, b \neq 0$)

+ $a^2 + b^2 < c^2$: phương trình (*) vô nghiệm

+ $a^2 + b^2 \geq c^2$: chia 2 vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{Đặt } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Phương trình (*) trở thành:

$$\Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \varphi = \alpha + k2\pi \\ x + \varphi = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - \varphi + k2\pi \\ x = \pi - \alpha - \varphi + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hoặc có dạng: $a.\cos x + b.\sin x = c$ (*) ($a \neq 0, b \neq 0$)

+ $a^2 + b^2 < c^2$: phương trình (*) vô nghiệm

+ $a^2 + b^2 \geq c^2$: chia 2 vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{Đặt } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Phương trình (*) trở thành:

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \varphi = \alpha + k2\pi \\ x - \varphi = -\alpha + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \varphi + k2\pi \\ x = -\alpha + \varphi + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3. Phương trình thuần nhất bậc hai $\sin x$ & $\cos x$:

Có dạng: $a.\sin^2 x + b.\sin x \cos x + c.\cos^2 x = d$

* Nếu $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thay vào pt kiểm tra đẳng thức đúng hay sai.

Đúng thì $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là một nghiệm của phương trình và tìm nghiệm còn lại.

* Nếu $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ chia 2 vế của pt cho $\cos^2 x$ đưa pt đã cho về

dạng $a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d.(1 + \tan^2 x)$

$$\Leftrightarrow (a - d)\tan^2 x + b\tan x + c - d = 0$$

4. Phương trình đối xứng theo $\sin x$ & $\cos x$:

a. Là phương trình có dạng: $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c$ (1) ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

Cách giải: Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $|t| \leq \sqrt{2}$

$$\text{Ta có: } t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Thay vào phương trình (1) ta được: $bt^2 + 2at - (b + 2c) = 0$ (*)

Giải phương trình (*) và chọn nghiệm thỏa điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

Sau đó tìm x bằng cách giải phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = t$

b. Hoặc có dạng: $a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x = c$ (2) ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \text{ Điều kiện: } |t| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Ta có: } t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}. \text{ Giải tương tự.}$$

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

1. Các quy tắc đếm:

a. Quy tắc nhân:

Một công việc H lần lượt thực hiện k giai đoạn $H_1, H_2, \dots, H_k$.

Trong đó: Giai đoạn H_1 có n_1 cách thực hiện.

Giai đoạn H_2 có n_2 cách thực hiện.

...

Giai đoạn H_k có n_k cách thực hiện.

Khi đó để hoàn thành công việc H phải thực hiện lần lượt k giai đoạn, vậy có: $n_1.n_2 \dots n_k$ cách để hoàn thành công việc H .

b. Quy tắc cộng:

Một công việc H có k phương án thực hiện xong công việc $H_1, H_2, \dots, H_k$. Mỗi công việc H_i độc lập với công việc H_j với $i, j \in (1; k)$.

Trong đó: Phương án H_1 có n_1 cách thực hiện.

Phương án H_2 có n_2 cách thực hiện.

...

Phương án H_k có n_k cách thực hiện.

Khi đó để hoàn thành công việc H ta có thể thực hiện k phương án H_i độc lập với nhau, vậy có: $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ cách để hoàn thành công việc H .

2. Hoán vị:

a. Nếu xếp n vật vào n vị trí theo một hàng dọc thì có $P_n = n!$ cách sắp xếp.

b. Nếu xếp n vật vào n vị trí theo một vòng tròn thì có $P_{n-1} = (n-1)!$ cách xếp.

3. Chính hợp:

a. Định nghĩa: Cho một tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k ($1 \leq k \leq n$) phần tử của tập hợp A có thứ tự được gọi là một chính hợp chập k từ n phần tử.

b. Định lý: Nếu ký hiệu số chính hợp chập k từ n phần tử là A_n^k thì:

$$A_n^k = n.(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

4. Tổ hợp:

a. Định nghĩa: Cho một tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập hợp con gồm k ($0 \leq k \leq n$) phần tử (hay mỗi bộ gồm k phần tử không có thứ tự) của tập hợp A được gọi là một tổ hợp chập k từ n phần tử.

b. Định lý: Nếu ký hiệu số tổ hợp chập k từ n phần tử là C_n^k thì:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

5. Các công thức:

a. Giai thừa:

$$1) P_n = n! \quad 2) n! = n.(n-1).(n-2)...2.1$$

$$3) n! = n.(n-1)! \quad 4) n.n! = (n+1)! - n!$$

$$\text{Quy ước: } 1! = 1; 0! = 1$$

b. Chính hợp:

$$5) A_n^k = n.(n-1)...(n-k+1)$$

$$6) A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$7) A_n^k = (n-k+1)A_n^{k-1}$$

$$8) A_n^n = A_n^{n-1} = n! \quad ; \quad A_1^1 = 1$$

c. Tổ hợp:

$$9) C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

$$10) C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$11) C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$12) C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$13) C_n^p = C_n^q \Leftrightarrow \begin{cases} p = q \\ p = n - q \end{cases}$$

$$14) C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$15) C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$16) C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$17) C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n . C_n^n = 0$$

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

1. Công thức:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

2. Các tính chất:

1) Trong khai triển $(a+b)^n$ có $n+1$ số hạng.

* Nếu n là số chẵn thì có 1 số hạng đứng giữa: là số hạng thứ $\frac{n}{2} + 1$

* Nếu n lẻ thì có 2 số hạng đứng giữa: là số hạng thứ: $\frac{n+1}{2}$ và $\frac{n+1}{2} + 1$

2) Mỗi số hạng có tổng số mũ của a và b là n.

3) Số hạng tổng quát thứ k + 1 là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

$$4) C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

$$5) C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$$

3. Tam giác Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc} n=1: & 1 & 1 & & & & \\ n=2: & 1 & 2 & 1 & & & \\ n=3: & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ n=4: & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ n=5: & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ n=6: & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ \dots & & & & & & & \dots \end{array}$$

GIẢI TÍCH

I. Ý NGHĨA ĐẠO HÀM - QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM - BẢNG CÁC ĐẠO HÀM

❖ Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k có phương trình:
 $y - y_0 = k(x - x_0)$

❖ Định lý 1: $f'(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$

❖ Định lý 2: Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ có phương trình:
 $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM:

$$(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'$$

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Đạo hàm hàm số hợp: $y_x' = y_u' . u'$

ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN	ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ HỢP
$(x^\alpha)' = \alpha . x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha . u^{\alpha-1} . u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' . \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' . \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' . (1 + \tan^2 u)$
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -u' . (1 + \cot^2 u)$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' . e^u$
$(a^x)' = a^x . \ln a$	$(a^u)' = u' . a^u . \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u . \ln a}$

II. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

1. CÔNG THỨC L'HOSPITAL:

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$.

$$\text{Nếu } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{Kết quả vẫn đúng khi } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

2. CÔNG THỨC LAGGANGE:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;b]$. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm trên $(a;b)$ thì tồn tại một số $c \in (a;b)$ sao cho: $f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$.

3. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ:

a. Định lý 1: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$.

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ thì $f(x)$ đồng biến (tăng) trên $(a;b)$.

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ thì $f(x)$ nghịch biến (giảm) trên $(a;b)$.

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in (a;b)$ thì $f(x)$ là hàm số hằng trên $(a;b)$.

b. Định lý 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$.

Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$ thì $f(x)$ đồng biến (tăng) trên $(a;b)$.

Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a;b)$ thì $f(x)$ nghịch biến (giảm) trên $(a;b)$.

Lưu ý: Định lý 2 ta không xét trường hợp $f'(x) = 0, \forall x \in (a;b)$

Ta chỉ xét $f'(x) = 0$ tại một số điểm hữu hạn.

4. CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU:

a. Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

• x_0 là một điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$

chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại.

• x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$

chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset D$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

➤ **Lưu ý:**

• Giá trị cực đại $f(x_0)$ (giá trị cực tiểu) không phải là GTLN (GTNN) của hàm số trên D . Mà $f(x_0)$ chỉ là GTLN (GTNN) trên một khoảng $(a;b)$ nào đó chứa x_0 .

• Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên D . Hàm số cũng có thể không có cực trị trên một tập hợp số thực cho trước.

• Nếu x_0 là một điểm cực trị của **hàm số f** thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của **đồ thị hàm số f** .

b. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị:

Định lý 1: Giả sử hàm số đạt cực trị tại x_0 . Khi đó:

Nếu hàm số có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

c. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị:

Định lý 2: Giả sử hàm số f liên tục trên $(a;b)$ chứa x_0 và có đạo hàm trên $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

• Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b)$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

• Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; b)$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

➤ **Phương pháp tìm điểm cực trị bằng Dấu hiệu 1: Lập BBT**

Giả sử hàm số có đạo hàm trên $(a;b)$ chứa x_0 .

• x_0 là điểm cực đại (hàm số đạt cực đại tại x_0)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'(x) \text{ đổi dấu từ dương sang âm khi qua } x_0. \end{cases}$$

• x_0 là điểm cực tiểu (hàm số đạt cực tiểu tại x_0)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'(x) \text{ đổi dấu từ âm sang dương khi qua } x_0. \end{cases}$$

Lưu ý:

Để hs có 1 cực đại và 1 cực tiểu khi và chỉ khi $f'(x)$ đổi dấu 2 lần.

Định lý 3: (Dấu hiệu 2)

Giả sử hàm số có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại x_0 .

• Nếu $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại (hàm số đạt cực đại tại x_0).

• Nếu $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu (hàm số đạt cực tiểu tại x_0).

➤ **Lưu ý:**

• Có một số hàm số $f''(x_0) = 0$ nhưng vẫn đạt cực đại, hoặc cực tiểu tại x_0 .

5. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT:

a. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập xác định D .

• Số M được gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Ký hiệu: $\max_D f(x)$

• Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Ký hiệu: $\min_D f(x)$

b. GTLN – GTNN trên khoảng:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b là $+\infty$)

Ta tìm $\max_{(a;b)} f(x)$, $\min_{(a;b)} f(x)$ (nếu $\max_{(a;b)} f(x)$, $\min_{(a;b)} f(x)$ tồn tại) bằng cách lập bảng

biến thiên của hàm số trên $(a;b)$ rồi dựa vào BBT để kết luận:

• Nếu trên $(a;b)$ có 1 cực đại duy nhất thì đó là GTLN của hs trên $(a;b)$.

• Nếu trên $(a;b)$ có 1 cực tiểu duy nhất thì đó là GTNN của hs trên $(a;b)$.

c. GTLN – GTNN trên đoạn:

Cho hs $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và chỉ có hữu hạn điểm tới hạn trên

đoạn $[a;b]$. Ta tìm $\max_{[a;b]} f(x)$, $\min_{[a;b]} f(x)$ bằng phương pháp sau:

• Nếu hs có các điểm tới hạn $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in [a;b]$ thì ta tính các giá trị: $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$ và $f(a), f(b)$ sau đó tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m

trong các số trên thì $M = \max_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min_{[a;b]} f(x)$.

• Nếu hs không có điểm tới hạn trên $[a;b]$ thì tính giá trị: $f(a), f(b)$ sau đó:

$$M = \max_{[a;b]} \{f(a); f(b)\} \text{ và } m = \min_{[a;b]} \{f(a); f(b)\}$$

❖ **Chú ý:**

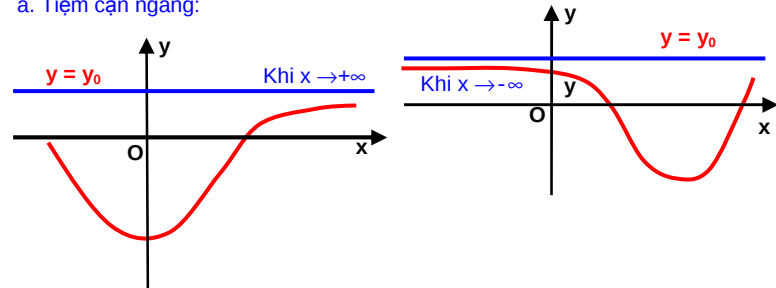
• Khi tìm GTLN – GTNN mà không nói trên khoảng hay trên đoạn tức là tìm GTLN – GTNN trên tập xác định của hàm số đó.

• Có thể không có GTLN – GTNN trên khoảng.

• Luôn tồn tại cả hai GTLN – GTNN trên đoạn.

III. TIỆM CẬN:

a. Tiệm cận ngang:



Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn. Đường thẳng $y = y_0$ là đường *tiệm cận ngang* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

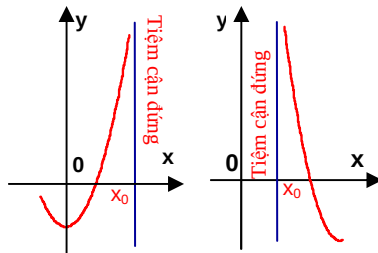
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0$$

b. Tiệm cận đứng:

Đường thẳng $x = x_0$ gọi là *tiệm cận đứng* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$



c. Tiệm cận xiên: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C).

Giả sử trên (C) có điểm $M(x; y) \rightarrow \infty$ và đường thẳng $d: y = ax + b$. Định nghĩa: d là tiệm cận xiên của đồ thị (C) khi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

• Mặt khác: Nếu $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ và $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

thì đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C): $y = f(x)$.

IV. CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ:

1. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ (C):

Cho đường cong (C): $y = f(x)$

a. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (1)$$

b. Tiếp tuyến (Δ) của đồ thị (C) song song hoặc vuông góc với một đường thẳng (D) cho trước:

Gọi k_1 là hệ số góc của (Δ) và k_2 là hệ số góc của (D).

+ Nếu (Δ) // (D) thì $k_1 = k_2 \Leftrightarrow f'(x_0) = k_2$

+ Nếu (Δ) $\perp$ (D) thì $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot k_2 = -1$

Ta giải pt trên $\Rightarrow M(x_0; y_0)$ rồi áp dụng pttt (1).

c. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua $M(x_0; y_0)$:

Gọi (D) là đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k:

$$\Rightarrow \text{pt (D): } y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow y = k \cdot (x - x_0) + y_0 = g(x)$$

Điều kiện để (D) tiếp xúc (C):

$$\Leftrightarrow \text{Hệ phương trình } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad \text{có nghiệm}$$

+ Thế k của pt (2) vào pt (1) khử k. Đưa pt (1) về dạng chứa một ẩn x.

+ Giải pt (1) $\Rightarrow x$. Thế x vào pt(2) $\Rightarrow k$.

+ Thế k vừa tìm được vào pt (*) $\Rightarrow$ pttt của (C).

* **Chú ý:** Hệ pt trên cho nghiệm là hoành độ tiếp điểm của (D) và (C).

2. PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ ĐỒ THỊ (C):

Cho đường cong (C): $y = f(x)$

a. Vẽ đồ thị hàm số: (C'): $y = |f(x)|$

$$\text{Ta có: } y = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra cách vẽ (C') như sau: Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng của phần phía dưới trục hoành của (C) qua trục hoành và bỏ đi phần đồ thị của (C) ở phía dưới trục hoành này.

b. Vẽ đồ thị hàm số: (C'): $y = f(|x|)$

Đặt $g(x) = f(|x|)$ có đồ thị là (C'). Ta có: $g(-x) = g(x)$

Từ đó suy ra cách vẽ (C') như sau: Bỏ đi phần đồ thị phía tay trái của trục tung của (C), lấy đối xứng phần còn lại của (C) qua trục tung.

c. Vẽ đồ thị hàm số: (C'): $|y| = f(x)$

Ta phải có $f(x) \geq 0$. Do đó $y = \pm f(x)$

Từ đó suy ra cách vẽ (C') như sau: Bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C), lấy đối xứng của phần đồ thị còn lại qua trục hoành.

...

HÀM SỐ MŨ

1. Lũy thừa với số mũ nguyên:

a. Khái niệm: Cho $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

• Với a tùy ý, $n \neq 0$ thì $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$

• Với $a \neq 0$, $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

• Chú ý: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

• $a^1 = a$, $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

b. Tính chất:

Cho hai số thực $a \neq 0$, $b \neq 0$ và hai số nguyên dương m, n. Ta có:

$$\begin{aligned} 1. & a^m \cdot a^n = a^{m+n} & 2. & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}} \\ 3. & (a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m & 4. & (ab)^n = a^n \cdot b^n \end{aligned}$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

6. Nếu $a > 1$ thì $a^n > a^m \Leftrightarrow n > m$;

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^n > a^m \Leftrightarrow n < m$.

7. Nếu $0 < a < b$ và n là **số nguyên** thì:

$$a^n < b^n \Leftrightarrow n > 0 ;$$

$$a^n > b^n \Leftrightarrow n < 0 .$$

8. Nếu $a < b$ và n là **số tự nhiên lẻ** thì $a^n < b^n$.

9. Nếu $a, b > 0$, n là **số nguyên** khác 0 thì:

$$a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$$

2. Căn bậc n:

a. Định nghĩa: Cho $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$). Số $a \in \mathbb{R}$ là căn bậc n của b nếu $a^n = b$.

VD: • Số 2 và số -2 là căn bậc 4 của 16 vì $(2)^4 = (-2)^4 = 16$.

Lưu ý: căn bậc bốn của 16 bằng 2. (tức là: $\sqrt[4]{16} = 2$)

• Số $-\frac{1}{3}$ là căn bậc 5 của $-\frac{1}{243}$ vì $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{1}{243}$.

➤ Từ định nghĩa trên ta có:

- b có duy nhất một căn bậc n lẻ, kí hiệu $\sqrt[n]{b}$.
- $b > 0$ có hai căn bậc n chẵn, kí hiệu $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$, trong đó $\sqrt[n]{b} > 0$.

3. Số nghiệm phương trình $x^n = a$:

	Số nghiệm phương trình $x^n = a$	
n chẵn	a < 0	Phương trình vô nghiệm
	a = 0	$x^n = a \Leftrightarrow x = 0$
	a > 0	$x^n = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n]{a} \\ x = -\sqrt[n]{a} \end{cases}$
n lẻ	a < 0	$x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$
	a = 0	
	a > 0	

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a. Định nghĩa: Cho số thực a dương, r là số hữu tỉ, giả sử $r = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$

và $n \geq 2$. Ta định nghĩa:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} ; a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} .$$

• Quy ước: $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 2$ thì $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

b. Tính chất: Cho $a, b \in \mathbb{R}^+$; $m, n, k \in \mathbb{N}$ và $m, n, k \geq 2$. Ta có:

$$1. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad 2. \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$3. \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad 5. \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$4. \text{ Cho } a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*, \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| ; \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$$

$$6. \sqrt[n]{a^{m \cdot n}} = a^m \qquad 7. \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$8. a > b > 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \qquad 9. a > b > 0 \Leftrightarrow a^n > b^n .$$

5. Lũy thừa với số mũ vô tỉ:

a. Định nghĩa: Cho số thực a dương, x là số vô tỉ. Khi đó a^x gọi là lũy thừa với số mũ vô tỉ.

b. Tính chất: (tương tự lũy thừa với số mũ nguyên)

$$1. a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad 2. \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{1}{a^{y-x}}$$

$$3. \left(a^x\right)^y = a^{xy} = \left(a^y\right)^x \qquad 4. (ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$6. \text{ Nếu } a > 1 \text{ thì } a^x > a^y \Leftrightarrow x > y ;$$

$$\text{Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì } a^x > a^y \Leftrightarrow x < y .$$

6. Hàm số lũy thừa:

Hàm số $y = x^\alpha$, trong đó α là số thực tùy ý, được gọi là hàm số lũy thừa.

Hàm số này xác định với mọi số thực $x > 0$. Khi $\alpha = 0$ thì $x^0 = 1, \forall x > 0$.

Hàm số $y = x^\alpha$ đồng biến khi $\alpha > 0$ và nghịch biến khi $\alpha < 0$.

❖ Chú ý:

- $\alpha \in \mathbb{N}^*$ thì $y = x^\alpha$ xác định trên $\mathbb{R}$
- α là số nguyên âm hoặc bằng 0 thì $y = x^\alpha$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- α là số không nguyên thì $y = x^\alpha$ xác định trên $(0; +\infty)$

7. Hàm số mũ:

a. Định nghĩa: Cho $0 < a \neq 1$ và $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ với cơ số a .

b. Tính chất:

- Hàm số $y = a^x$ có TXĐ là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $\mathbb{R}^+$ và liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = a^x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.
- $a^x = a^t \Leftrightarrow x = t$.

HÀM SỐ LOGARIT

1. Định nghĩa: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ (ĐK: $0 < a \neq 1; b > 0$)

2. Tính chất: Cho $0 < a \neq 1; b > 0$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$\log_a a^n = n$$

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$$

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{ĐK: } 0 < a \neq 1; b > 0) \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a M \cdot \log_a N = \log_a \left(\frac{M}{N} \right) \quad (\text{ĐK: } 0 < a \neq 1; M, N > 0)$$

$$\log_a M + \log_a N = \log_a (M \cdot N) \quad (\text{ĐK: } 1 \neq a > 0; M, N > 0)$$

3. Hàm số lôgarit:

a. Định nghĩa: Cho $0 < a \neq 1$ và $x \in \mathbb{R}^+$. Hàm số lôgarit với cơ số a của x được

xác định bởi công thức $y = \log_a x$.

• Đặc biệt: $+a = 10$: Ta kí hiệu $y = \lg x$ (hàm số lôgarit thập phân).

$+a = e$: Ta kí hiệu $y = \ln x$ (hàm số lôgarit tự nhiên).

b. Tính chất:

1. $y = \log_a x$ có tập xác định là $\mathbb{R}^+$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.

2. $y = \log_a x$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$.

3. $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

4. Phương trình:

$$1. \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 & (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$$

$$2. \log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$

Trong một số trường hợp phương trình phức tạp ta có thể đặt ẩn số phụ hoặc dự đoán nghiệm và chứng minh đó là nghiệm duy nhất...

5. Bất phương trình:

$$1. \text{ Nếu } a > 1: \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$2. \text{ Nếu } 0 < a < 1: \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Trong trường hợp $a = \varphi(x)$ là một hàm số thay đổi theo biến số x thì ta xét từng trường hợp: $\varphi(x) > 1$ và $0 < \varphi(x) < 1$.

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP THƯỜNG GẶP	NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ HỢP
$\int dx = x + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	$\int du = u + C$ $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad (u = u(x) \neq 0)$ $\int e^u du = e^u + C$ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ $\int \cos u du = \sin u + C$ $\int \sin u du = -\cos u + C$ $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int (1 + \tan^2 u) du = \tan u + C$ $\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int (1 + \cot^2 u) du = \cot u + C$
CÁC CÔNG THỨC BỔ SUNG	
NGUYÊN HÀM THƯỜNG GẶP: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$ $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$ $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ $\int a^{nx} dx = \frac{a^{nx}}{n \cdot \ln a} + C$ $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$ $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	❖ CÁC CÔNG THỨC LŨY THỪA: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}; (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}; \sqrt[n]{a^n} = a$ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC: a. CÔNG THỨC HẠ BẠC: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ b. BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$

V. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN - TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

1. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG:

a. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (C): $y = f(x)$, $y = 0$ (trục Ox) và

hai đường thẳng $x = a$, $x = b$:
$$S = \int_a^b |f(x)|.dx$$

* Trường hợp 1: Nếu (C): $y = f(x)$ và trục Ox không có điểm chung thì:

$$S = \int_a^b |f(x)|.dx = \left| \int_a^b f(x).dx \right|$$

(vì $f(x)$ không đổi dấu $\forall x \in [a; b]$)

* Trường hợp 2: Nếu (C): $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm $c \in (a; b)$ thì:

$$S = \int_a^b |f(x)|.dx = \int_a^c |f(x)|.dx + \int_c^b |f(x)|.dx = \left| \int_a^c f(x).dx \right| + \left| \int_c^b f(x).dx \right|$$

* Trường hợp 3: Nếu (C): $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt x_1, x_2

+ Nếu $x_1, x_2 \in (a; b)$ thì:
$$S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|.dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx \right|$$

+ Nếu $x_1, x_2 \notin (a; b)$ thì:
$$S = \int_a^b |f(x)|.dx = \left| \int_a^b f(x).dx \right|$$

* Trường hợp 4: Nếu (C): $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 giả sử: $x_1 < x_2 < x_3$ thì:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|.dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)|.dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x).dx \right|$$

* LƯU Ý:

- Đường thẳng $x = a$ hoặc $x = b$ có thể là trục tung $x = 0$.

- Các bước tính diện tích:

- Phương trình hoành độ (C) và Ox: $f(x) = 0$
- Giải phương trình $f(x) = 0$ tìm nghiệm (nếu có)
- Tính diện tích hình phẳng tùy theo từng trường hợp

b. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (C₁): $y = f(x)$, (C₂): $y = g(x)$

và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$:
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|.dx$$

* Trường hợp 1: Nếu (C₁) và (C₂) không có điểm chung thì:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|.dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)].dx \right|$$

* Trường hợp 2: Nếu (C₁) và (C₂) cắt nhau tại 1 điểm $c \in (a; b)$ thì:

$$S = \int_a^c |f(x) - g(x)|.dx + \int_c^b |f(x) - g(x)|.dx = \left| \int_a^c [f(x) - g(x)].dx \right| + \left| \int_c^b [f(x) - g(x)].dx \right|$$

* Trường hợp 3: Nếu (C₁) và (C₂) cắt nhau tại 2 điểm p. biệt $x_1, x_2 \in (a; b)$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|.dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)].dx \right|$$

* Trường hợp 4: Nếu (C₁) và (C₂) cắt nhau tại 2 điểm pb $x_1, x_2 \notin (a; b)$

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|.dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)].dx \right|$$

* Trường hợp 5: Nếu (C): $y = f(x)$ có tiếp tuyến (D): $y = g(x)$ tại x_0 thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), (D), $x = a$ (giả sử $a < x_0$) là

$$S = \int_a^{x_0} |f(x) - g(x)|.dx = \left| \int_a^{x_0} [f(x) - g(x)].dx \right|$$

Đường thẳng $x = a$ có thể là trục tung ($x = 0$). Khi đó:

$$S = \left| \int_0^{x_0} [f(x) - g(x)].dx \right|$$

* Trường hợp 6: Nếu (C): $y = f(x)$ có 2 tiếp tuyến (D₁): $y = g_1(x)$ và (D₂): $y = g_2(x)$ cắt nhau tại x_0 , (C) tiếp xúc (D₁) và (D₂) tại x_1, x_2

$$S = \int_{x_1}^{x_0} |f(x) - g_1(x)|.dx + \int_{x_0}^{x_2} |f(x) - g_2(x)|.dx = \left| \int_{x_1}^{x_0} [f(x) - g_1(x)].dx \right| + \left| \int_{x_0}^{x_2} [f(x) - g_2(x)].dx \right|$$

2. THỂ TÍCH HÌNH TRÒN XOAY:

a. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi (C): $y = f(x)$, trục Ox: $y = 0$ và 2 đường $x = a$, $x = b$ khi nó quay quanh trục Ox

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

b. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi (C): $x = g(y)$, trục Oy: $x = 0$ và 2 đường $y = c$, $y = d$ khi nó quay quanh trục Oy

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

c. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi 2 đường (C₁): $y = f(x)$ và (C₂): $y = g(x)$ cắt nhau tại 2 điểm x_1, x_2 khi nó quay quanh trục Ox:

$$V = \pi \left| \int_{x_1}^{x_2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \right|$$

d. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi 2 đường (C₁): $x = f(y)$ và (C₂): $x = g(y)$ cắt nhau tại 2 điểm y_1, y_2 khi nó quay quanh trục Oy:

$$V = \pi \left| \int_{y_1}^{y_2} ([f(y)]^2 - [g(y)]^2) dy \right|$$

ĐẠI SỐ

I. Định lý Viet trong đa thức bậc ba:

Nếu x_1, x_2, x_3 là nghiệm của đa thức bậc ba:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0) \text{ thì } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Ngược lại nếu hai số x_1, x_2, x_3 có $x_1 + x_2 + x_3 = S$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = T$, $x_1x_2x_3 = P$ thì x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của ph. trình: $X^3 - SX + TX - P = 0$.

II. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Các bất đẳng thức cơ bản:

a. Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối:

$|a + b| \leq |a| + |b|$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$

$||a| - |b|| \leq |a - b|$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$

$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_i a_j \geq 0 \forall i, j$

b. Bất đẳng thức Cauchy (Côsi):

Cho 2 số không âm a, b , ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

* Hệ quả:

- Với $a > 0$, ta có: $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $a = 1$

- $\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2 \forall a \neq 0$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm 1$

* Tổng quát: Cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta có:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

c. Bất đẳng thức Bunhiacopxki:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ tùy ý, ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \geq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

* Quy ước: $b_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$

d. Bất đẳng thức tam giác:

$$\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$$

$$\text{Từ } |\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a} = k \cdot \vec{b}, k > 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} > 0$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Hệ đối xứng loại 1:

Hệ đối xứng loại 1 hai ẩn số x và y là hệ nếu thay x bởi y và thay y bởi x mà từng phương trình trong hệ không thay đổi.

* Cách giải:

- Đặt $x+y = S$ và $x \cdot y = P$. Từ hệ trên ta có hệ phương trình theo S và P .

- Giải hệ phương trình tìm S và P .

- Khi đó, x và y là nghiệm của pt $X^2 - SX + P = 0$ với $S^2 - 4P \geq 0$

2. Hệ đối xứng loại 2:

Hệ đối xứng loại 2 hai ẩn số x và y là hệ mà nếu thay x bởi y , thay y bởi x thì phương trình này trở thành phương trình kia và ngược lại.

* Cách giải:

- Trừ vế theo vế hai phương trình với nhau thì ta được phương trình tích số trong đó có thừa số $(x - y)$. Giải hệ bằng phương pháp thế.

3. Hệ đẳng cấp bậc 2:

Biểu thức $F(x; y)$ gọi là đẳng cấp bậc hai đối với x, y khi mọi $t \neq 0$, ta có $F(tx, ty) = t^2 F(x; y)$.

$$\text{Dạng tổng quát của hệ } \begin{cases} F_1(x; y) = A_1 & \text{trong } F_1(x; y) \text{ \& } F_2(x; y) \\ F_2(x; y) = A_2 \end{cases}$$

là những biểu thức đẳng cấp đối với x, y

* Cách giải:

- Xét nghiệm với $y = 0$

- Với $y \neq 0$, đặt $x = ty$

- Tìm t từ hệ rồi suy ra x, y .

* Giải hệ bằng cách đặt tham số mới:

- Từ 1 trong các pt của hệ xem x là ẩn và y là tham số thì được pt bậc hai đối với x . Giải tìm x theo y rồi sau đó dùng pp thế để tìm nghiệm.

PT & BẤT PT CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

$$* C_1: |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x) - g(x)] \cdot [f(x) + g(x)] = 0 \end{cases}$$

$$* C_2: |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$* |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$* |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

PT & BẤT PT CHỨA CĂN BẬC HAI

$$* \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$* \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$* \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

Thầy NGUYỄN DUY KHÔI

Đ/c: 24/B2 QL1 - Phường Quyết Thắng BH – ĐN

(Gần trường Chu Văn An)

ĐT: 0958.800.800