Chương 1 : CƠ SỞ LOGIC

I. Khái niệm mệnh đề và chân trị

1. *Các khái niệm*

Mệnh đề toán học là các phát biểu để diễn đạt một ý tưởng trọn vẹn và ta có thể khẳng định một cách khách quan là nó đúng hoặc sai.

Tính chất cốt yếu của một mệnh đề là nó đúng hoặc sai, và không thể vừa đúng vừa sai.

Giá trị *đúng* hoặc *sai* của một mệnh đề được gọi là *chân trị của mệnh đề*.

Về mặt ký hiệu, ta thường dùng các mẫu tự (như p, q, r, ...) để ký hiệu cho các mệnh đề, và chúng cũng được dùng để ký hiệu cho các biến logic, tức là các biến lấy giá trị đúng hoặc sai. Chân trị "*đúng*" thường được viết là **1**, và chân trị "*sai*" được viết là **0**.

2. *Mệnh đề sơ cấp – mệnh đề phức hợp*

Mệnh đề sơ cấp là các "nguyên tử" theo nghĩa là nó không thể được phân tích thành một hay nhiều (từ hai trở lên) mệnh đề thành phần đơn giản hơn.

Mệnh đề phức hợp là mệnh đề được tạo thành từ một hay nhiều mệnh đề khác bằng cách sử dụng các liên kết logic như từ "không" dùng trong việc phủ định một mệnh đề, các từ nối: "và", "hay", "hoặc", "suy ra", v.v....

II. Các phép toán mệnh đề

1. *Bảng chân trị*

Các phép toán logic được định nghĩa bằng bảng chân trị (truth table). Bảng chân trị xác định chân trị của mệnh đề phức hợp theo từng trường hợp của các chân trị của các mệnh đề sơ cấp tạo thành mệnh đề phức hợp..

Tác dụng của bảng chân trị

- Kê ra sự liên hệ chân trị giữa mệnh đề phức hợp với chân trị của các mệnh đề sơ cấp cấu thành nó,
- liệt kê sự liên hệ chân trị giữa các mệnh với các mệnh đề đơn giản hơn cấu thành chúng.

2. *Phép phủ định*

Cho p là một mệnh đề, chúng ta dùng ký hiệu ¬p để chỉ mệnh đề phủ định của mệnh đề p. "Sự phủ định" được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

P	¬p
1	0
0	1

Ký hiệu ¬ được đọc là "không"

Mệnh đề phủ định ¬ p có chân trị là đúng (1) khi mệnh đề p có chân trị sai (0), ngược lại ¬ p có chân trị sai (0) khi p có chân trị đúng (1).

3. *Phép hội*

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p **hay** q" là p Λ q. Phép "và", ký hiệu là Λ , được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	p Λ q
0	0	0
0	1	0

1	0	0
1	1	1

Nhận xét: Bằng cách lập bảng chân trị, ta có:
- Các mệnh đề p và p Λ p luôn có cùng chân trị.
- Mệnh đề pΛ¬ p luôn có chân trị bằng 0 (tức là một mệnh đề luôn sai).

4. ***Phép tuyển***

Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p hay q" là p∨q. Phép "hay", ký hiệu là ∨ , được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	p ∨ q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Nhận xét :
- Cho p là một mệnh đề,ta có mệnh đề p ∨¬ p luôn luôn đúng.
- Người ta còn sử dụng phép "tuyển loại" trong việc liên kết các mệnh đề. Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề "p tuyển loại q" là p⊕q. Phép "tuyển loại", ký hiệu là ⊕, được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	p V q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Chân trị của mệnh đề p ⊕q phụ thuộc vào các chân trị của 2 mệnh đề p, q : mệnh đề p ⊕q đúng khi trong 2 mệnh đề p và q có một mệnh đề đúng, một mệnh đề sai.

5. ***Phép kéo theo***

Phép kéo theo, ký hiệu bởi → , được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện có dạng : "**nếu . . . thì . . .**". Cho p và q là 2 mệnh đề, ta sẽ viết **p→ q** để diễn đạt phát biểu "nếu p thì q". Phép toán kéo theo → được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	p → q
0	0	1
0	1	1

1	0	0
1	1	1

Mệnh đề p → q, được đọc là "nếu p thì q", còn được phát biểu dưới các dạng khác sau đây: "q nếu p"; "p chỉ nếu q"; "p là điều kiện đủ cho q". "q là điều kiện cần cho p".

6. *Phép kéo theo 2 chiều*

Phép kéo theo 2 chiều hay phép tương đương, ký hiệu bởi↔, được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện hai chiều có dạng : "**. . . nếu và chỉ nếu . . .**". Cho p và q là 2 mệnh đề, ta viết **p ↔q** để diễn đạt phát biểu "p nếu và chỉ nếu q". Phép toán tương đương ↔được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	p↔q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Mệnh đề p ↔q, được đọc là "p nếu và chỉ nếu q", còn được phát biểu dưới các dạng khác sau đây: "p khi và chỉ khi q"; "p la‘ điều kiện cần va‘ đủ cho q".

7. *Độ ưu tiên của các toán tử logic.*

Tương tự như đối với các phép toán số học, để tránh phải dùng nhiều dấu ngoặc trong các biểu thức logic, ta đưa ra một thứ tự ưu tiên trong việc tính toán. Ở trên ta có 5 toán tử logic:¬ (không) , ∧ (và), ∨ (hay), → (kéo theo), ↔ (tương đương)

¬

∧ , ∨

→ ↔

trong đó, các toán tử liệt kê trên cùng dòng có cùng độ ưu tiên.

III. Dạng mệnh đề và các luật logic

Trong phép tính mệnh đề ta cũng có các biểu thức logic được xây dựng từ :

- Các mệnh đề hay các giá trị hằng.
- Các biến mệnh đề.
- Các phép toán logic, và cả các dấu ngoặc "( )" để chỉ rõ thứ tự thực hiện của các phép toán.

Giả sử E, F là 2 biểu thức logic, khi ấy ¬ E, E ∧ F, E → F, E ↔ F cũng là các biểu thức logic.

Ví dụ: Biểu thức E(p,q,r) = (((¬ p) ∨ q)→ (r ∧ s)) là một biểu thức logic trong đó p, q, r là các biến mệnh đề.

1. *Bảng chân trị của một biểu thức logic*

Bảng chân trị của một biểu thức logic là bảng liệt kê chân trị của biểu thức logic theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức logic hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.

Ví dụ 1: Bảng chân trị của các biểu thức logic p→ q và ¬ p ∨ q theo các biến mệnh đề p,q như sau:

P	q	**p→ q**	¬ p	¬ p ∨ q
0	0	**1**	1	**1**
0	1	**1**	1	**1**
1	0	**0**	0	**0**
1	1	**1**	0	**1**

2. *Sự tương đương logic*

Hai biểu thức logic E và F theo các biến mệnh đề nào đó được gọi là tương đương logic khi E và F luôn luôn có cùng chân trị trong mọi trường hợp chân trị của bộ biến mệnh đề.

Khi đó ta viết: E ⇔ Fđọc là "E tương đương với F".

Như vậy, theo định nghĩa ta có thể kiểm tra xem 2 biểu thức logic có tương đương hay không bằng cách lập bảng chân trị của các biểu thức logic.

3. *Biểu thức hằng đúng, biểu thức hằng sai*

Biểu thức logic E được gọi là hằng đúng nếu chân trị của E luôn luôn bằng 1 (đúng) trong mọi trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề trong biểu thức E. Nói một cách khác, E là một hằng đúng khi ta có: E ⇔1.

Biểu thức logic E được gọi là hằng sai nếu chân trị của E luôn luôn bằng 0 (sai) trong mọi trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề trong biểu thức E. Nói một cách khác, E là một hằng đúng khi ta có: E ⇔ 0.

Ta có thể kiểm tra xem một biểu thức logic có phải là hằng đúng (hằng sai) hay không bằng cách lập bảng chân trị của các biểu thức logic.

Lưu ý:

Giả sử E và F là 2 biểu thức logic. Khi đó, E tương đương logic với F (tức là ta có E ⇔ F) khi và chỉ khi biểu thức logic E ↔ F là hằng đúng (tức là E ↔F ⇔1).

Nếu E ⇔ F và F ⇔ G thì E ⇔ G.

4. *Các luật logic*

Các luật logic là cơ sở để ta thực hiện các biến đổi trên một biểu thức logic để có được một biểu thức logic mới tương đương logic với biểu thức logic có trước.

a. *Các luật về phép phủ định*
- ¬¬ p ⇔ p (luật phủ định của phủ định)
- ¬ 1 ⇔ 0
- ¬ 0 ⇔ 1

b. *Luật giao hoán*
- p ∧ q ⇔ q ∧ p
- p ∨ q ⇔ q ∨ p

c. *Luật kết hợp*
- *p ∧ (q ∧ r) ⇔ (p ∧ q) ∧ r*
- p ∨ (q ∨ r) ⇔ (p ∨ q) ∨ r

d. *Luật phân bố*
- p ∧ (q ∨ r) ⇔ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
- p ∨ (q ∧ r) ⇔ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

e. *Luật De Morgan*

- $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
- $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

f. *Luật về phần tử bù*
- $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
- $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$

g. *Luật kéo theo*
- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

h. *Luật tương đương*
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

i. *Các luật đơn giản của phép tuyển*
- $p \vee p \Leftrightarrow p$ (tính lũy đẳng của phép tuyển)
- $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ (luật này còn được gọi là luật thống trị)
- $p \vee 0 \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa)
- $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ)

j. *Các luật đơn giản của phép hội*
- $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (tính lũy đẳng của phép hội)
- $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa)
- $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ (luật này còn được gọi là luật thống trị)
- $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ)

Những luật trên được chọn lựa để làm cơ sở cho chúng ta thực hiện các biến đổi logic, suy luận và chứng minh.

5. Các qui tắc thay thế

Dưới đây là các qui tắc để cho ta có thể suy ra những biểu thức logic mới hay tìm ra các biểu thức logic tương đương với một biểu thức logic cho trước.

a. *Qui tắc 1*

Trong một biểu thức logic E, nếu ta thay thế một biểu thức con bởi một biểu thức logic tương đương với biểu thức con đó thì ta sẽ được một biểu thức mới E’ tương đương với biểu thức E.

b. *Qui tắc 2*

Giả sử biểu thức logic E là một hằng đúng. Nếu ta thay thế một biến mệnh đề p bởi một biểu thức logic tuỳ ý thì ta sẽ được một biểu thức logic mới E’ cũng là một hằng đúng.

c. *Các ví dụ áp dụng*

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng biểu thức $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ là một hằng đúng.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng biểu thức$p \wedge q \rightarrow p$là một hằng đúng.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng biểu thức$p \rightarrow p \vee q$là một mệnh đề hằng đúng.

Nhận xét:*Các ví dụ trên cho ta thấy một quan hệ khác giữa các mệnh đề phức hợp hay các mệnh đề : quan hệ “**suy ra**”. Khi mệnh đề $p \rightarrow q$ là hằng đúng, ta nói rằng p suy ra q (về mặt logic). Chúng ta sẽ dùng ký hiệu $\Rightarrow$ để chỉ quan hệ “suy ra”. Quan hệ suy ra nầy có tính truyền (hay bắc cầu), nhưng không có tính chất đối xứng.*

IV.Quy tắc suy diễn

1. Định nghĩa

Tuy có nhiều kỹ thuật, nhiều phương pháp chứng minh khác nhau, nhưng trong chứng minh trong toán học ta thường thấy những lý luận dẫn xuất có dạng:

Nếu p_1 và p_2 và . . . và p_n

thì q.

Dạng lý luận nầy được xem là hợp lý (được chấp nhận là đúng) khi ta có biểu thức $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ là hằng đúng.

Ta gọi dạng lý luận trên là một **luật suy diễn**

Người ta cũng thường viết luật suy diễn trên theo các cách sau đây :

- Cách 1: Biểu thức hằng đúng

  $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q \Leftrightarrow 1$
- Cách 2: Dòng suy diễn

  $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$
- Cách 3: Mô hình suy diễn

  p_1

  . . . .

  p_n

  $\therefore$ q

Các biểu thức logic $p_1, p_2, \ldots, p_n$ trong luật suy diễn trên được gọi là giả thiết (hay tiền đề), và biểu thức q được gọi là kết luận.

Ví dụ : Giả sử p và q là các biến logic. Xác định xem mô hình sau đây có phải là một luật suy diễn hay không?

$p \rightarrow q$

p

$\therefore$ q

Giải: Lập bảng chân trị ta có:

P	Q	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\wedge p$	$((p\rightarrow q) \wedge p)\rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Bảng chân trị cho thấy biểu thức $((p\rightarrow q) \wedge p)\rightarrow q$ là hằng đúng. Do đó, mô hình suy luận trên đúng là một luật suy diễn.

2. Kiểm tra một qui tắc suy diễn

Để kiểm tra một qui tắc suy diễn xem có đúng hay không ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau đây:

a. Phương pháp 1: Lập bảng chân trị.

Thiết lập biểu thức logic tương ứng của qui tắc suy diễn và lặp bảng chân trị của biểu thức đó để xem nó có phải là hằng đúng hay không. Trong trường hợp biểu thức logic là hằng đúng thì ta kết luận qui tắc suy diễn là đúng. Ngược lại, ta kết luận qui tắc suy diễn là sai.

Ví dụ: Kiểm tra qui tắc suy diễn sau đây$(p\rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

b. Phương pháp 2: Chứng minh bằng cách sử dụng các luật logic.

Thiết lập biểu thức logic tương ứng của qui tắc suy diễn và chứng minh biểu thức là hằng đúng bằng cách áp dụng các luật logic và các qui tắc thay thế.

Ví dụ: Kiểm tra qui tắc suy diễn sau đây: $(p\to q) \wedge p \Rightarrow q$

Ghi chú: Để kiểm tra một qui tắc suy diễn ta còn có thể kết hợp 2 phương pháp trên và áp dụng cả những luật suy diễn đã biết trước.

3. Các qui tắc suy diễn cơ bản

a. *Qui tắc Modus Ponens*

$(p\to q) \wedge p \to q$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$p \to q$

p

————————

$\therefore q$

b. *Qui tắc Modus Tollens*

$(p\to q) \wedge q \to \neg p$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$p \to q$

$\neg q$

——————

$\therefore \neg p$

c. *Tam đoạn luận*

$(p\to q) \wedge (q\to r) \wedge (p\to r)$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$p \to q$

$q\to r$

———————

$\therefore p\to r$

d. *Qui tắc chứng minh bằng phản chứng*

$p \to q \Rightarrow (p \to \neg q) \to 0$

Qui tắc nầy cho phép ta chứng minh $(p \to \neg q) \to 0$ thay cho $p \to q$. Nói cách khác, nếu ta thêm giả thiết phụ vào tiền đề p mà chứng minh được có sự mâu thuẫn thì ta có thể kết luận q từ tiền đề p.

e. *Qui tắc chứng minh theo trường hợp*

$(p_1\to q) \wedge (p_2\to q) \wedge \ldots \wedge (p_n\to q) \Rightarrow (p_1\vee p_2\vee \ldots \vee p_n) \to q$

hoặc là viết dưới dạng mô hình suy diễn

$p_1\to q$

$p_2\to q$

. . .

$p_n\to q$

————————————————

$\therefore (p_1\vee p_2\vee \ldots \vee p_n) \to q$

f. *Kiểm tra một phép suy luận cụ thể*

Để kiểm tra một suy luận cụ thể là đúng hay không, ta căn cứ vào các qui tắc suy diễn (luật suy diễn).

V. Định nghĩa vị từ và lượng từ

1. Định nghĩa vị từ:

Một vị từ là một phát biểu p(x, y, …) phụ thuộc theo các biến x, y, … lấy giá trị trên các miền xác định A, B, … nào đó. Khi thay thế các biến trong vị từ bởi các giá trị cụ thể a, b, … thuộc các miền xác định thì ta được một mệnh đề p(a, b, …) có chân trị đúng hoặc sai.

Gọi B là tập hợp gồm có hai giá trị : Sai (ký hiệu bởi 0), và Đúng (ký hiệu bởi 1). Một vị từ p(x, y, …) có thể lấy 1 trong 2 giá trị của tập B.

Ví dụ: P(n) ≡ "n là một số nguyên tố" là một vị từ trên tập hợp các số tự nhiên (hoặc trên tập hợp các số nguyên). Ta có thể thấy rằng:

P(1) = 0, tức là P(1) ≡ "1 là một số nguyên tố" là một mệnh đề sai.
P(2) = 1, tức là P(2) ≡ "2 là một số nguyên tố" là một mệnh đề đúng.
P(12) = 0, tức là P(12) ≡ "12 là một số nguyên tố" là một mệnh đề sai.
P(17) = 1, tức là P(17) ≡ "17 là một số nguyên tố" là một mệnh đề đúng.

2. *Các phép toán trên các vị từ*

Cho p(x, y, …) là một vị từ theo các biến x, y, … . Phủ định của p, ký hiệu là ¬p, là một vị từ mà khi thay các biến x, y, … bởi các phần tử cụ thể a, b, … tương ứng thì ta được mệnh đề ¬(p(a, b, …)). Nói một cách khác, vị từ ¬p được định nghĩa bởi:(¬ p) (x, y, …) = ¬(p(x, y, …))

Cho p(x, y, …) và q(x, y, …) là các vị từ theo các biến x, y, … . Phép hội của p và q, ký hiệu là p→ q, là một vị từ mà khi thay các biến x, y, … bởi các phần tử cụ thể a, b, … tương ứng thì ta được mệnh đề p(a, b, …) → q(a, b, …). Nói một cách khác, vị từ p∧q được định nghĩa bởi:(p ∧ q) (x, y, …) = p (x, y, …) ∧ q (x, y, …)

Một cách tương tự, các phép toán tuyển, kéo theo và tương đương của 2 vị từ p và q có thể được định nghĩa như sau:

(p ∨ q) (x, y, …) = p (x, y, …) ∨ q (x, y, …)
(p → q) (x, y, …) = p (x, y, …) → q (x, y, …)
(p ↔ q) (x, y, …) = p (x, y, …) ↔ q (x, y, …)

VI.Các lượng từ và các mệnh đề có lượng từ

1. *Khái niệm*

Lượng từ "*với mọi*" và "*tồn tại*" (hay "có ít nhất một")là từ dùng để diễn tả vị từ đúng đối với mọi giá trị thuộc miền xác định hay chỉ đúng với một phần các giá trị thuộc miền xác định.

Cho P(n) là một vị từ theo biến số tự nhiên n.

- Phát biểu "<u>với mọi</u> n ∈**N**, P(n)" có nghĩa là P có giá trị đúng trên toàn bộ miền xác định. Ký hiệu " ∀ " để thay thế cho lượng từ "**với mọi**".
- Phát biểu "<u>Có (ít nhất) một</u> n ∈**N**, P(n)" có nghĩa là P có giá trị đúng đối với một hay một số giá trị nào đó thuộc miền xác định. Ký hiệu "∃ " để thay thế cho lượng từ "**có ít nhất một**". Lượng từ nầy còn được đọc một cách khác là "**tồn tại**".

Trong nhiều phát biểu người ta còn dùng cụm từ ***"tồn tại duy nhất"***, ký hiệu bởi ∃**!**, như là một sự lượng từ hóa đặc biệt.

<u>Các Ví dụ:</u>

- Cho vị từ P(n) ≡ "n là một số nguyên tố". Mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n ta có n là nguyên tố" có thể được viết như sau:∀ n ∈**N** : P(n)và mệnh đề nầy có chân trị là 0 (sai).
- Mệnh đề "Với mọi số nguyên n ta có 2n-1 là một số lẻ" có thể được viết dưới dạng ký hiệu như sau:∀ n ∈**Z** : 2n-1 lẻvà mệnh đề nầy có chân trị là 1 (đúng).

- Mệnh đề "Ta có $x^2 > 0$, với mọi số thực x khác 0" có thể được viết là $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\} : x^2 > 0$ và mệnh đề nầy có chân trị là 1 (đúng).

2. Qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ

Dựa vào cách xác định chân trị của các mệnh đề có lượng từ, ta có các qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ sau đây:

- $\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$ (1)
- $\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$ (2)

Ghi chú :

Từ các qui tắc trên ta có thể nói chung về qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ như sau: Nếu trong một mệnh đề có lượng từ ta thay thế lượng từ $\forall$ bởi lượng từ $\exists$, lượng từ $\exists$ bởi lượng từ $\forall$, và biểu thức vị từ được thay thế bởi phủ định của nó thì ta sẽ được mệnh đề phủ định của mệnh đề có lượng từ ban đầu. Qui tắc nầy cũng áp dụng được cho các mệnh đề với nhiều lượng từ.

3. Một số qui tắc dùng trong suy luận

a. Thay đổi thứ tự lượng từ hóa của 2 biến

Cho một vị từ p(x, y) theo 2 biến x, y. Nếu lượng từ hóa cả 2 biến x, y trong đó ta lượng từ hóa biến y trước và lượng từ hóa biến x sau thì sẽ được 4 mệnh sau đây:

- x, $\forall$ y : p(x,y)
- x, $\forall$ y : p(x,y)
- x, $\forall$ y : p(x,y)
- x, $\forall$ y : p(x,y)

Tương tự ta cũng có 4 mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ p(x, y) trong đó ta lượng từ hóa biến x trước và lượng từ hóa biến y sau:

- y, $\forall$ x : p(x,y)
- y, $\forall$ x : p(x,y)
- y, $\forall$ x : p(x,y)
- y, $\forall$ x : p(x,y)

b. Định lý:

Giả sử p(x, y) là một vị từ theo 2 biến x, y thì các mệnh đề sau là đúng

- $(\forall x, \forall y : p(x,y)) \leftrightarrow (\forall y, \forall x : p(x,y))$
- $(\exists x, \exists y : p(x,y)) \leftrightarrow (\exists y, \exists x : p(x,y))$
- $(\exists x, \forall y : p(x,y)) \rightarrow (\forall y, \exists x : p(x,y))$

c. Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng

Giả sử một mệnh đề có lượng từ trong đó biến x với miền xác định là A, được lượng từ hóa và bị buộc bởi lượng từ phổ dụng $\forall$, và mệnh đề là đúng. Khi đó nếu thay thế x bởi $a \in A$ thì ta sẽ được một mệnh đề đúng.

d. Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng

Qui tắc: Nếu ta thay thế biến x trong vị từ P(x) bởi một phần tử a cố định nhưng tùy ý thộc miền xác định của biến x mà mệnh đề nhận được có chân trị là đúng, tức là P(a) = 1, thì mệnh đề lượng từ hóa $\forall x : P(x)$ là một mệnh đề đúng.

Từ các qui tắc trên ta có thể chứng minh được một số tính chất suy diễn được phát biểu trong các mệnh đề sau đây:

- **Mệnh đề 1:** Cho p(x) và q(x) là các vị từ theo biến x lấy giá trị trong tập hợp A (miền xác định của biến x là tập hợp A), và a là một phần tử cố định tùy ý thuộc A. Khi ấy ta có qui tắc suy diễn sau đây:

  $\forall x : p(x) \rightarrow q(x)$

p(a)

∴ q(a)

- **Mệnh đề 2:** Cho p(x), q(x) và r(x) là các vị từ theo biến x lấy giá trị trong tập hợp A (miền xác định của biến x là tập hợp A). Ta có qui tắc suy diễn sau đây:

  $\forall x : p(x) \to q(x)$

  $\forall x : q(x) \to r(x)$

  $\therefore \forall x : p(x) \to r(x)$

4. *Dịch những câu thông thường thành biểu thức logic:*

Dịch một câu được phát biểu bằng ngôn ngữ tự nhiên (câu hỏi thông thường) thành một biểu thức logic có vai trò hết sức quan trọng trong xây dựng các ngôn ngữ lập trình, chương trình dịch và xử lý ngôn ngữ tự nhiên. Quá trình dịch một câu từ ngôn ngữ tự nhiên thành một biểu thức sẽ làm mất đi tính tự nhiên của ngôn ngữ vì đa số các ngôn ngữ đều không rõ ràng, nhưng một biểu thức logic lại rất rõ ràng chặt chẽ từ cú pháp thể hiện đến ngữ nghĩa của câu. Điều này dẫn đến phải có một tập hợp các giả thiết hợp lý dựa trên một hàm xác định ngữ nghĩa cuả câu đó. Một khi câu đã được chuyển dịch thành biểu thức logic, chúng ta có thể xác định được giá trị chân lý của biểu thức logic, thao tác trên biểu thức logic, biến đổi tương đương trên biểu thức logic.

Chúng ta sẽ minh hoạ việc dịch một câu thông thường thành biểu thức logic thông qua những sau.

a. *Ví dụ 1*

Dịch câu "Bạn không được lái xe máy nếu bạn cao dưới 1.5 mét trừ phi bạn trên 18 tuổi" thành biểu thức logic.

Giải :

Ta gọi p là câu : *Bạn được lái xe máy.*

q là câu : *Bạn cao dưới 1.5m.*

r là câu : *Bạn trên 18 tuổi.*

Khi đó: Câu hỏi trên được dịch là: $(q \wedge \neg r) \to \neg p$

b. *Ví dụ 2*

Dịch câu "Tất cả các sinh viên học tin học đều học môn toán học rời rạc"

Giải:

Gọi P(x) là câu "x cần học môn toán học rời rạc" và x được xác định trong không gian của các sinh viên học tin học. Khi đó chúng ta có thể phát biểu: $\forall x\ P(x)$

c. *Ví dụ:*

Dịch câu "Có một sinh viên ở lớp này ít nhất đã ở tất cả các phòng của ít nhất một nhà trong ký túc xá".

Giải:

Gọi tập sinh viên trong lớp là không gian xác định sinh viên x, tập các nhà trong ký túc xá là không gian xác định căn nhà y, tập các phòng là không gian xác định phòng z. Ta gọi P(z,y) là "z thuộc y", Q(x,z) là "x đã ở z". Khi đó ta có thể phát biểu:

$$\exists x\ \exists y\ \forall z\ (P(z,y) \to Q(x,z));$$

VII. Tập hợp - Các phép toán tập hợp

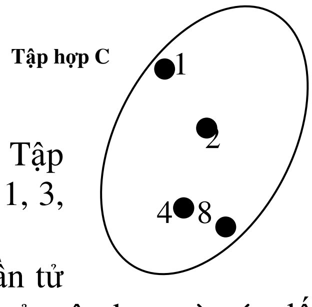
1. *Khái niệm tập hợp*

Tập hợp là một trong các khái niệm cơ bản của Toán học. Khái niệm tập hợp không được định nghĩa mà chỉ được mô tả qua các ví dụ: Tập hợp các học sinh của một lớp học, tập hợp các cầu thủ của một đội bóng, tập hợp các cuốn sách trên một giá sách, tập hợp các số tự nhiên,...

Các đối tượng cấu thành một tập hợp được gọi là các phần tử của tập hợp đó. Người ta thường kí hiệu các tập hợp bởi các chữ A, B, C, X, Y, Z,... và các phần tử của tập hợp bởi các chữ a, b, c, x, y, z, ...

Nếu a là một phần tử của tập hợp A thì ta viết $a \in A$ (đọc là a thuộc tập hợp A).

Nếu a không phải là một phần tử của tập hợp A thì ta viết $a \notin A$ (đọc là a không thuộc tập hợp A).



2. ***Biểu diễn một tập hợp***

Có hai cách biểu diễn một tập hợp:

- Cách thứ nhất là liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp. Tập hợp A gồm bốn số tự nhiên 1, 3, 5, 7 được viết là: A = {1, 3, 5, 7}.
- Cách thứ hai là nêu lên một tính chất chung của các phần tử của tập hợp, nhờ đó có thể nhận biết được các phần tử của tập hợp và các đối tượng không phải là những phần tử của nó. Chẳng hạn, C = {x / x là ước số của 8}

Người ta thường biểu thị tập hợp A bởi một đường cong kín gọi là lược đồ Venn.

3. ***Tập hợp con, các tập hợp bằng nhau***

a. *Tập hợp con :*

Tập hợp A được gọi là một tập con của tập hợp X nếu mọi phần tử của A đều là những phần tử của X. Ký hiệu : $A \subset X$ (1) hoặc $X \supset A$(2) (đọc là X chứa A)

Ký hiệu $\subset$ được gọi là dấu bao hàm. Hệ thức (1) hoặc (2) gọi là một bao hàm thức.

Định lý *: tập hợp có n phần tử có cả thảy 2^n tập hợp con.*

b. *Các tập hợp bằng nhau*

Tập hợp A và tập hợp B được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $A \subset B$ và $B \subset A$

c. *Với các tập hợp bất kì A, B, C, ta có:*

- $\phi \subset A$,
- $A \subset A$,
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$,
- Nếu $A \neq B$ thì $A \not\subset B$

4. ***Các phép toán trên tập hợp***

a. *Giao của các tập hợp*

Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp tạo nên bởi các phần tử chung của hai tập hợp đó, kí hiệu là: $A \cap B$ (đọc là A giao B)

Từ định nghĩa của $A \cap B$ suy ra rằng $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$

Từ định nghĩa giao của hai tập hợp, dễ dàng chứng minh được các đẳng thức sau với các tập hợp bất kì A, B, C, ta có:

- $A \cap B = B \cap A$,
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
- $\varnothing \cap A = \varnothing$
- $A \cap A = A$

b. *Hợp của các tập hợp*

Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp tạo nên bởi các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đó, kí hiệu là $A \cup B$ (đọc là A hợp B).

Từ định nghĩa của $A \cup B$ suy ra rằng $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$.

Từ định nghĩa của hợp các tập hợp dễ dàng suy ra với các tập hợp bất kì A, B, C,

- $A \cup B = B \cup A$,
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

- $\varnothing \cup A = A$,
- $A \cup A = A$.

c. Hiệu của hai tập hợp

Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B, kí hiệu là A \ B (đọc là A trừ B).

Từ định nghĩa của A \ B suy ra:$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \notin B$

Với các tập hợp bất kì A, B, C, D, ta có:

- $A \setminus B \subset A$
- Nếu $C \subset D$ thì $A \setminus D$ $A \setminus C$
- Nếu $A \subset B$ và $C \subset D$ thì $A \setminus D \subset B \setminus C$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$.

d. Phần bù của một tập hợp

Cho tập hợp X và A là một tập con của X. Tập hợp X \ A được gọi là phần bù của A và được kí hiệu là CA

Từ định nghĩa phần bù của một tập hợp suy ra rằng Nếu X là một tập hợp và $A \subset X$ thì với mọi $x \in X$, $x \in CA \Leftrightarrow x \notin A$.

Với các tập con bất kì A, B của không gian X, ta có:

- $X \cap A = A$,
- $C\varnothing = X$,
- $X \cup A = X$,
- $CCA = A$,
- $CX = \varnothing$,
- $A \subset B \Leftrightarrow CB \subset CA$.

e. Tích Descartes của các tập hợp

Cho hai tập hợp X và Y,tập hợp tất cả các cặp thứ tự (x, y) trong đó $x \in X$, $y \in Y$ gọi là tích Descartes của hai tập hợp X, Y và được kí hiệu là X x Y.

Như vậy, $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Cho m tập hợp X1, X2, ..., Xm. Tập hợp các dãy m phần tử (x1, x2, ..., xm),trong đó $x1 \in X1$, $x2 \in X2$, ..., $xn \in Xm$ gọi là tích Đêcác của m tập hợp X1,X2, ..., Xm và được kí hiệu là X1 x X2 x... x Xm.

$X1 \times X2 \times ... \times Xm = \{(x1, x2, ..., xm) : x1 \in X1, ... xm \in Xm\}$.

Nếu X1 = X2 = ... = Xm thì tập hợp X1 x X2 x... x Xm được kí hiệu là X^m.

Như vậy X^m là tập hợp các dãy m phần tử (x1, x2, ..., xm), trong đó $x1, ..., xm \in X$.

VIII. Khái niệm Ánh xạ

1. Định nghĩa

Giả sử X và Y là hai tập hợp. một ánh xạ **f** từ X vào Y **là một quy tắc cho ta** với mỗi phần tử $x \in X$, tồn tại một phầntử duy nhất $y \in Y$ sao cho **y=**f(**x**).

Ánh xạ f từ tập hợp X vào tập hợp Y được kí hiệu là:$f : X \to Y$.

Nếu x là một phần tử của tập hợp X thì phần tử y của tập hợp Y sao cho **y=f(x)** y được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f.

2. Ánh xạ bằng nhau

Giả sử X và Y là hai tập hợp, f và g là hai ánh xạ từ X vào Y. Ta nói rằnghai ánh xạ f và g là bằng nhau, và viết f = g, nếu f (x) = g (x) với mọi $x \in X$.

3. Ánh xạ hợp

Cho 2 ánh xạ

$f : X \to Y$

$g : Y \to Z$

Ánh xạ hợp h của f và g là ánh xạ từ X vào Z xác định bởi:

$h : X \to Z$

$x \to h(x) = g(f(x))$

Ta viết h = g o f.

4. Ảnh và ảnh ngược

a. *Định nghĩa*

Cho **ánh** xạ f từ X vào Y và $A \subset X$, $B \subset Y$. Ta định nghĩa:

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

$= \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$

$\forall y \in Y, y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x);$

$\forall y \in Y, y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x).$

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

$\forall x \in X, x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B;$

$\forall x \in X, x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B.$

Ta thường ký hiệu f(X) bởi Imf và $f^{-1}(\{y\})$ bởi $f^{-1}(y)$. Imf được gọi là *ảnh* của ánh xạ f.

b. *Tính chất:*

$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$

$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2);$

$f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2);$

$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$

$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$

5. ***Phân loại ánh xạ***

a. *Đơn ánh*

Ta nói $f : X \to Y$ là một ***đơn ánh*** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều có ảnh khác nhau, nghĩa là: $\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

b. *Toàn ánh*

Ta nói $f : X \to Y$ là một ***toàn ánh*** nếu Imf = Y

c. *Song ánh*

Ta nói $f : X \to Y$ là một song ánh nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

IX. Lực lượng của tập hợp

1. ***Định nghĩa lực lượng của tập hợp***

Mỗi tập A ta đặt tương ứng với một đối tượng |A| gọi là *lực lượng của tập* A ,sao cho |A| = |B| khi và chỉ khi tồn tại song ánh từ A vào B.

Lực lượng của tập A còn được gọi là *bản số của* A và ký hiệu là cardA.

Lực lượng của tập rỗng là số 0 Lực lượng của tập {1,2,…,n} là n.

2. ***Định nghĩa tập hợp hữu hạn-vô hạn***

Tập hợp A được gọi là tập hữu hạn nêu ta có thể đếm được hết các phần tử của tập hợp này.

Nếu mãi vẫn còn những phần tử của A không được đếm tới thì tập A được gọi là tập vô hạn.

3. ***Tập hợp đếm được***

a. *Định nghĩa 1 :*

Lực lượng của tập số tự nhiên N được gọi là lực lượng đếm được.

b. *Định nghĩa 2 :*

Hai tập hợp A và B được gọi là tương đương nhau nếu có thể thiết lập một song ánh giữa 2 tập hợp này. Ký hiệu A ~B

c. *Định nghĩa 3 :*

Một tập hợp tương đương với tập hợp N được gọi là tập hợp đếm được *d. Định nghĩa 4 :*

Tập hợp không đếm được là một tập hợp vô hạn và không là tập hợp đếm được/

X. Quy nạp toán học – Định nghĩa đệ quy

1. Quy nạp toán học

a. Khái niệm

Quy nạp là kết luận đi từ trường hợp riêng đi tới trường hợp tổng quát. Nghĩa là, kết luận tổng quát dựa trên việc nghiên cứu các tính chất của nhiều sự kiện, nhiều thí nghiệm hay nhiều quan sát riêng lẻ.

Nếu kết luận chung dựa vào nghiên cứu tất cả các sự kiện riêng (các đối tượng, các hình, các số, vv…) thì quy nạp được gọi là đầy đủ hay hoàn chỉnh.

Nếu kết luận chung dựa vào nghiên cứu một phần của tập hợp tất cả các sự kiện (các đối tượng) thì quy nạp được gọi là không đầy đủ hay không hoàn chỉnh.

b. *Cơ sở toán của nguyên lý quy nạp*

Nếu W là một tính chất được xác định trên tập hợp tất cả các số tự nhiên sao cho W(1) (1 có tính chất W), đối với một số tự nhiên n nếu W(n) thì W(n+1) (nếu n có tính chất W thì n+1 có tính chất W), thì mọi số tự nhiên đều có tính chất W.

2. Các định lý về quy nạp

a. Định lý 1.

Nếu W là một tính chất được xác định trong tập hợp của tất cả các số tự nhiên sao cho W (1) (1 có tính chất W) đối với mọi số tự nhiên n: nếu W(k) (k có tính chất W) với mọi số tự nhiên k: sao cho thì W(n+1) (n+1 có tính chất W), thì mọi số tự nhiên đều có tính chất W.

b. Định lý 2.

Nếu là φ hàm mệnh đề của biến x biến thiên trên tập hợp tất cả các số tự nhiên sao cho $\varphi(1)$ (1 thoả mãn mệnh đề $\varphi(x)$) đối với mọi số tự nhiên n : nếu $\varphi(k)$ (k thoả mãn $\varphi(x)$) đối với mọi số tự nhiên k sao cho , thì $\varphi(n+1)$ (n+1 thỏa mãn $\varphi(x)$), thì mọi số tự nhiên thỏa mãn hàm mệnh đề $\varphi(x)$.

3. Thuật toán đệ quy

a. Khái niệm đệ quy

Một thuật toán được gọi là đệ quy nếu nó giải bài toán bằng cách rút gọn liên tiếp bài toán ban đầu tới bài toán cũng như vậy nhưng có dữ liệu đầu vào nhỏ hơn.

Ví dụ: Tìm thuật toán đệ quy tính UCLN của hai số nguyên a,b không âm và a > b.

```
procedure UCLN (a,b: các số nguyên không âm, a > b)
        if b = 0 then
            UCLN (a,b) := a
        else
            UCLN (a,b) := UCLN (a mod b, b)
```

b. Đệ quy và lặp:

Ví dụ. Thủ tục đệ quy sau đây cho ta giá trị của n! với n là số nguyên dương.

```
procedure factorial (n: positive integer)
        if n = 1 then
            factorial(n) := 1
        else
            factorial(n) := n * factorial(n-1)
```

Thông thường để tính một dãy các giá trị được định nghĩa bằng đệ quy, nếu dùng phương pháp lặp thì số các phép tính sẽ ít hơn là dùng thuật toán đệ quy (trừ khi dùng các máy đệ quy chuyên dụng). Ta sẽ xem xét bài toán tính số hạng thứ n của dãy Fibonacci.

procedure fibonacci (n: nguyên không âm)

```
if n = 0 then
        fibonacci(n) := 0
else
        if  n = 1 then
                fibonacci(n) := 1
        else
                fibonacci(n) := fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2)
```

Theo thuật toán này, để tìm fn ta biểu diễn fn = fn-1 + fn-2. Sau đó thay thế cả hai số này bằng tổng của hai số Fibonacci bậc thấp hơn, cứ tiếp tục như vậy cho tới khi f0 và f1 xuất hiện thì được thay bằng các giá trị của chúng theo định nghĩa. Do đó để tính fn cần fn+1-1 phép cộng.

Bây giờ ta sẽ tính các phép toán cần dùng để tính fn khi sử dụng phương pháp lặp. Thủ tục này khởi tạo x là f0 = 0 và y là f1 = 1. Khi vòng lặp được duyệt qua tổng của x và y được gán cho biến phụ z. Sau đó x được gán giá trị của y và y được gán giá trị của z. Vậy sau khi đi qua vòng lặp lần 1, ta có x = f1 và y = f0 + f1 = f2. Khi qua vòng lặp lần n-1 thì x = fn-1. Như vậy chỉ có n – 1 phép cộng được dùng để tìm fn khi n > 1.

procedure Iterative fibonacci (n: nguyên không âm)

```
if n = 0 then y := 0
else
begin
        x := 0 ; y := 1
        for i := 1 to n - 1
        begin
                z := x + y
                x := y ; y := z
        end
end
        {y là số Fibonacci thứ n}
```

Ta đã chỉ ra rằng số các phép toán dùng trong thuật toán đệ quy nhiều hơn khi dùng phương pháp lặp. Tuy nhiên đôi khi người ta vẫn thích dùng thủ tục đệ quy hơn ngay cả khi nó tỏ ra kém hiệu quả so với thủ tục lặp. Đặc biệt, có những bài toán chỉ có thể giải bằng thủ tục đệ quy mà không thể giải bằng thủ tục lặp.

Chương 2 : PHÉP ĐẾM

I. Phép Đếm

1. Định nghĩa:

Cho A là một tập hợp khác rỗng. Nếu tồn tại một số nguyên dương n và một song ánh f từ A vào { 1, 2, . . ., n} thì ta nói A là một tập hợp hữu hạn và A có n phần tử. Khi đó song ánh f : A →{ 1, 2, . . ., n} được xem là một *phép đếm* tập hợp A.

Tập hợp rỗng có số phần tử là 0, và cũng được xem là tập hữu hạn. Số phần tử của một tập hợp hữu hạn A được ký hiệu là | A |.

Nếu tập hợp A không hữu hạn, ta nói A là một tập *vô hạn* và viết| A | = ∞

2. Tính chất:

Cho A và B là các tập hợp hữu hạn. Giả sử tồn tại đơn ánh từ A vào B. Khi ấy ta có: | A | ≤ | B |.

II. Nguyên lý cộng

1. Mệnh đề:

Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là $A \cap B = \emptyset$. Khi ấy ta có:$| A \cup B | = | A | + | B |$

Một cách tổng quát: Nếu A_1, A_2, ..., An là các tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là phần giao của hai tập hợp bất kỳ trong n tập hợp là rỗng, thì số phần tử của phần hội của các tập hợp trên bằng tổng của các số lượng phần tử trong mỗi tập hợp: $| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup An | = | A_1 | + | A_2 | + \ldots + | An |$

Ghi chú:

Trong trường hợp đối với hai tập hợp hữu hạn A và B tùy ý thì ta có:

$$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$$

Tính chất nầy có thể mở rộng cho trường hợp đối với n tập hợp tùy ý A_1, A_2, ..., An như sau:$| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup An | = \Sigma_{1\le r\le n} | Ar | - \Sigma_{1\le r< s\le n} | Ar \cap As |$

$+ \Sigma_{1\le r< s< t \le n} | Ar \cap As \cap At | - \ldots + (-1)^n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap An |$

2. Nguyên lý cộng :

Giả sử ta phải thực hiện công việc và để thực hiện công việc nầy ta có thể chọn một trong hai biện pháp khác nhau theo nghĩa là cách thực hiện biện pháp thứ nhất luôn luôn khác cách thực hiện biện pháp thứ hai. Biện pháp thứ nhất có n cách thực hiện, và đối với biện pháp thứ hai ta có m cách thực hiện. Vậy ta có n+m cách thực hiện công việc.

Ví dụ: Xác định giá trị của k sau khi đoạn chương trình sau đây được thực hiện xong

```
k := 0
for i1 := 1 to n1 do
        k := k + 1;
        for i2 := 1 to n2 do
                k := k + 1;
.
.
.
for im := 1 to nm do
k := k + 1;
```

Lời giải.

Giá trị của k ban đầu là 0. Sau đó là m vòng lặp khác nhau. Mỗi thao tác lặp trong một vòng lặp là cộng thêm 1 vào k. Vòng lặp thứ i có ni thao tác, và tất cả m vòng lặp không thể thực hiện 2 vòng lặp nào một cách đồng thời. Do đó số thao tác để thực hiện xong đoạn chương trình trên là $n_1 + n_2 + ... + n_m$. Đây cũng chính là giá trị cuối cùng của k.

3. Nguyên lý nhân :

Mệnh đề:

Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn rời nhau. Khi ấy ta có:

$$| A \times B | = | A | . | B |$$

Một cách tổng quát: Nếu A_1, A_2, ..., An là các tập hợp hữu hạn thì số phần tử của tích Descartes của các tập hợp trên bằng tích của các số lượng phần tử của các tập hợp trên:

$$| A_1 \times A_2 \times . . . \times An | = | A_1 | . | A_2 | . . . . . | An |$$

Giả sử ta phải thực hiện một thủ tục bao gồm hai công việc kế tiếp nhau. Để thực hiện công việc thứ nhất ta có n_1 cách, và ứng với mỗi cách chọn thực hiện công việc thứ nhất ta có n_2 cách thực hiện công việc thứ hai. Vậy ta có số cách thực hiện thủ tục là $n_1 \times n_2$.

Nguyên lý nhân trên có thể được mở rộng và có dạng tổng quát như sau: Giả sử một thủ tục bao gồm m công việc kế tiếp nhau T_1, T_2, . . ., Tm. Nếu công việc T_1 có thể được thực hiện theo n_1 cách, và sau khi chọn cách thực hiện cho T_1 ta có n_2 cách thực hiện T_2, v.v… cho đến cuối cùng, sau khi chọn cách thực hiện các công việc T_1, T_2, . . ., Tm_{-1} ta có nm cách thực hiện Tm. Vậy ta có $n_1.n_2$. ... .nm cách để thực hiện thủ tục. Nguyên lý nhân ở dạng tổng quát nầy có thể được chứng minh bằng qui nạp từ qui tắc nhân cho trường hợp thủ tục gồm 2 công việc.

Ví dụ: Theo qui tắc nhân ta thấy rằng sau khi thực hiện đoạn chương trình dưới đây thì giá trị của biến k sẽ là $n_1.n_2$. ... .nm.

```
k := 0
for i1 = 1 to n1 do
for i1 = 1 to n2 do
.
.
.
for i1 = 1 to nm do
k := k + 1
```

III. Nguyên lý Dirichlet tổng quát:

1. Mệnh đề:

Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất]N/k[đồ vật.

2. Các ví dụ :

- *Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau.*
  Gọi N là số sinh viên, khi đó] N/5 [= 6 khi và chỉ khi 5 < N/5 ≤ 6 hay 25 < N ≤ 30. Vậy số N cần tìm là 26.
- *Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong nước có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng 0XX - 8XXXXX với X nhận các giá trị từ 0 đến 9).*
  Có 10^7 = 10.000.000 số điện thoại khác nhau có dạng 0XX - 8XXXXX. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có] 25.000.000/10.000.000 [= 3 có cùng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 3 mã vùng.

3. Một số ứng dụng của nguyên lý Dirichlet.

- *Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.*
  Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến n – 1. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là n – 1 (tức là quen tất cả). Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành n –1 nhóm. Vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tai một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau.
- *Trong một tháng gồm 30 ngày, một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất 1 trận nhưng chơi không quá 45 trận. Chứng minh rằng tìm được một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.*
  Gọi a_j là số trận mà đội đã chơi từ ngày đầu tháng đến hết ngày j. Khi đó
  $$1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{30} < 45$$
  $$15 \le a_1+14 < a_2+14 < ... < a_{30}+14 < 59.$$
  Sáu mươi số nguyên $a_1, a_2, ..., a_{30}, a_1+ 14, a_2 + 14, ..., a_{30}+14$ nằm giữa 1 và 59. Do đó theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 trong 60 số này bằng nhau. Vì vậy tồn tại i và j sao cho ai= aj+ 14 (j < i). Điều này có nghĩa là từ ngày j + 1 đến hết ngày i đội đã chơi đúng 14 trận.
- *Chứng tỏ rằng trong n + 1 số nguyên dương không vượt quá 2n, tồn tại ít nhất một số chia hết cho số khác.*
  Ta viết mỗi số nguyên $a_1, a_2,..., a_{n+1}$ dưới dạng $a_j = 2^{k_j} q_j$ trong đó k_j là số nguyên không âm còn q_j là số dương lẻ nhỏ hơn 2n. Vì chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 2n nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại i và j sao cho $q_i = q_j = q$. Khi đó $a_i= 2^{k_i}$ q và aj = 2^{k_j} q. Vì vậy, nếu $k_i \le k_j$ thì a_j chia hết cho a_i còn trong trường hợp ngược lại ta có a_i chia hết cho a_j.
- *Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.*
  Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A, điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet tổng quát, vì] 5/2 [= 3. Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A. nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại, tức là nếu trong ba người B, C, D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau. Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của A.

IV.CHỈNH HỢP

1. Định nghĩa

Cho X là một tập hợp gồm n phần tử, và r là một số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng n. Mỗi phép chọn r phần tử phân biệt của X theo một thứ tự nào đó sẽ cho ta một *chỉnh hợp* n chọn r. Nói cách khác, ta có thể xem một chỉnh hợp như là một dãy hay một bộ gồm r phần tử phân biệt được chọn từ n phần tử cho trước.

Ví dụ. Cho tập hợp S = { 1, 2, 3} . Dãy gồm 2 phần tử 3, 2 là một chỉnh hợp 3 chọn 2. Sự sắp xếp các phần tử thành dãy 3, 1, 2 cho ta một chỉnh hợp 3 chọn 3. Chỉnh hợp 3 chọn 3 nầy còn được gọi là một hoán vị của 3 phần tử.

Một chỉnh hợp n chọn n được gọi là một *hoán vị* của n phần tử. Nói cách khác, một hoán vị n phần tử là một cách sắp xếp n phần tử theo một thứ tự nào đó. Mỗi hoán vị n phần tử của tập X cũng có thể được xem như một song ánh từ X vào X.

2. Công thức chỉnh hợp

Định lý I.1. Số các chỉnh hợp n chọn r là

Ghi chú:

0! = 1

n! = (n-1)! n (n lớn hơn 0)

V. TỔ HỢP

1. *Định nghĩa*

Cho X là một tập hợp gồm n phần tử, và r là một số nguyên không âm nhỏ hơn hoặc bằng n. Mỗi phép chọn r phần tử phân biệt của X mà không phân biệt thứ tự trước sau sẽ cho ta một *tổ hợp* n chọn r. Nói cách khác, ta có thể xem một tổ hợp n chọn r như là một tập hợp con gồm r phần tử của một tập hợp có n phần tử.

Ví dụ : Cho tập hợp S = { 1, 2, 3, 4} . Ta có tập S' = { 1, 3, 4} là một tổ hợp 4 chọn 3.

Số các tổ hợp n chọn r được ký hiệu là **C(n,r)**.

Ví dụ : C(4,2) = 6 vì ta có thể liệt kê ra tất cả các tập hợp con 2 phần tử của một tập hợp có 4 phần tử và thấy có tất cả là 6 tập con.

2. *Công thức tổ hợp*

Định lý.

Số các tổ hợp n chọn r , với n và r là các số nguyên thỏa $0 \le r \le n$, là

Ví dụ : Số danh sách không kể thứ tự trước sau gồm 5 người của một lớp học gồm 10 người là C(10,5) = 10! / (5!5!) = 252.

VI.CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON:

1. *Định lý.*

Cho x và y là 2 biến thực, n là một số nguyên không ấm tùy ý. Ta có:

$(x+y)^n=$

2. *Hệ quả 1.*

Cho n là một số nguyên không âm tùy ý. Ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

3. *Hệ quả 2.*

Cho n là một số nguyên không âm. Ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) = 0$$

VII. MỘT SỐ TÍNH CHẤT KHÁC CỦA TỔ HỢP

a. *Với mọi số tự nhiên n ta có:*

C(n, 0) = 1

C(n, n) = 1

b. *Cho n và r là 2 số nguyên không âm và $r \le n$. Ta có:*

C(n,r) = C(n,n-r)

c. *Cho n và k là 2 số nguyên sao cho 0 < k < n. Khi đó ta có:*

C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1).

d. *Công thức Vandermonde:*

Cho m, n, và r là các số nguyên không âm với r nhỏ hơn hoặc bằng m và n. Ta có:

$$C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m, r-k)C(n,k).$$

VIII. HOÁN VỊ LẶP VÀ TỔ HỢP LẶP

1. Hoán vị lặp

a. Định nghĩa

Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau (i =1,2,…,k ; $n_1 + n_2, \ldots + n_k = n$), Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một hoán vị lặp của n.

b. Định lý 1:

Giả sử có n vật hay đối tượng trong đó có n_1 đối tượng thuộc loại 1 (giống nhau), n_2 đối tượng thuộc loại 2, . . ., và n_r đối tượng thuộc loại thứ r, với $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Khi ấy số cách sắp xếp n đối tượng trên thành dãy có thứ tự, hay số hoán vị của n đối tượng, là : $n! / (n_1!\, n_2! \ldots n_r!)$

Ví dụ: Giả sử n và k là 2 số nguyên dương sao cho n = 2k. Chứng minh rằng $n!/ 2^k$ là một số nguyên.

Giải: Xét n ký hiệu $x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_k, x_k$. Theo định lý trên ta có số hoán vị của n ký hiệu nầy làn! / (2! 2! . . . 2!) = $n!/ 2^k$Suy ra rằng $n!/ 2^k$ là một số nguyên.

c. Định lý 2:

$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \Sigma \{C(n, r_1, \ldots, r_m)\ x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m} : 0 \le r_i \le n, r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n\}$ trong đó các hệ số $c(n, r_1, \ldots, r_m)$ được tính theo công thức$C(n, r_1, \ldots, r_m) = n! / (r_1!\, r_2! \ldots r_m!)$

Ví dụ: Tìm hệ số của $x^3y^2z^2$ trong khai triển của $(x + 2y - 3z)^7$.

Giải: Áp dụng định lý ta có: trong khai triển của $(x + 2y - 3z)^7$, số hạng chứa $x^3y^2z^2$ có dạng $C(7, 3, 2, 2)\ x^3(2y)^2(-3z)^2$

Suy ra hệ số của $x^3y^2z^2$ là $C(7, 3, 2, 2)\ 2^2(-3)^2 = 36 \times 7! / (3!\ 2!\ 2!) = 7560$

IX.Tổ hợp lặp

1. Định nghĩa:

Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau(trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiềulần) được gọi là tổ hợp lặp chập k của n.Số cáctổ hợp lặp chập k của n được ký hiệu là

2. Công thức tính tổ hợp lặp:

Số các tổ hợp lặp chập k của n được tính theo công thức

3. Các hệ quả:

a. *Hệ quả 1 :*

Số nghiệm nguyên không âm (x1,x2,…,xn) (mỗi xi đều nguyên không âm) của phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ là

b. *Hệ quả 2 :*

Số cách chia k vật đồng chất nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n là

Ví dụ: Tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 có ít nhất 5 bi, biết rằng hộp 2 và 3 chứa không quá 6 bi.

- Trước hết ta tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 có ít nhất 5 bi.
- Nhận xét rằng ta cần lấy 5 bi để xếp trước vào hộp 1, do đó số bi còn lại chỉ là 25. Suy ra số cách xếp trong trường hợp này bằng số cách xếp 25 bi vào 5 hộp mà không có điều kiện gì thêm. Số đó là $K_5^{25} = C_{5+25-1}^{25}$=23751
- Tương tự ta có Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, hộp 2 chứa ít nhất 7 bi là:$K_5^{18} = C_{5+18-1}^{18}$
- Tương tự ta có Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, hộp 3 chứa ít nhất 7 bi là:$K_5^{18} = C_{5+18-1}^{18}$
- Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, mỗi hộp 2 và 3 chứa ít nhất 7 bi là:$K_5^{11} = C_{5+11-1}^{11}$
- Sử dụng công thức$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ta suy ra số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, đồng thời hộp 2 hay hộp 3 chứa ít nhất 7 bi là$K_5^{18} + K_5^{18} - K_5^{11} = C_{22}^{18} + C_{22}^{18} - C_{15}^{11} = 13265$

Chương 3 : QUAN HỆ

I. Quan hệ hai ngôi

1. Định nghĩa

Cho một tập hợp X khác rỗng. Một *quan hệ 2 ngôi* trên X là một tập hợp con R của X^2. Cho 2 phần tử x và y của X, ta nói x có quan hệ R với y khi và chỉ khi $(x,y) \in R$, và viết là x R y. Như vậy:x R y $\Leftrightarrow (x,y) \in R$; Khi x không có quan hệ R với y, ta viết: x $\overline{R}$y.

Ví dụ:

Trên tập hợp X = { 1,2,3,4} , xét quan hệ 2 ngôi R được định nghĩa bởi:R = { (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)}Với quan hệ nầy ta có: 2 R 4, nhưng 2 $\overline{R}$3.

Trên tập hợp các số nguyên Z ta định nghĩa một quan hệ 2 ngôi R như sau:x R y nếu và chỉ nếu x-y là số chẵn.hay nói cách khác:$R = \{ (x,y) \in Z^2 \mid x-y = 2k \text{ với } k \in Z \}$ Quan hệ R nầy chính là quan hệ đồng dư modulo 2.

Ghi chú :

Người ta còn định nghĩa một quan hệ (2 ngôi) giữa một tập hợp A và một tập hợp B là một tập hợp con của AxB.

Ví dụ:

A = { 1, 2, 3, 4, 5} , B = { 0, 1} . Ta có R = { (1,1), (2,0), (3,1), (4,0), (5,0)} là một quan hệ giữa A và B.

Tổng quát hơn, ta có thể định nghĩa một *quan hệ* giữa các tập hợp $A_1, A_2, \ldots$, An là một tập hợp con của $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ (tích Descartes của các tập hợp $A_1, A_2, \ldots$, An). Như vậy, khi R là một quan hệ giữa các tập $A_1, A_2, \ldots$, An thì mỗi phần tử của R là một bộ n $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với $a_i \in$ Ai (i=1, …, n).

2. Cách xác định một quan hệ:

Dựa vào các phương pháp xác định một tập hợp, ta có thể xác định một quan hệ bằng các phương pháp sau đây:

a. *Liệt kê:*

Liệt kê tất cả các cặp hay bộ phần tử có quan hệ R (tức là thuộc R).

b. *Nêu tính chất đặc trưng cho quan hệ R :*

Nêu tính chất hay tiêu chuẩn để xác định các phần tử thuộc R hay không.

c. *Các tính chất của quan hệ 2 ngôi*

Giả sử R là một quan hệ 2 ngôi trên một tập hợp X

- *Tính phản xạ*

Quan hệ R có tính *phản xạ* nếu và chỉ nếu x R x với mọi $x \in X$.

- *Tính đối xứng*

Quan hệ R có tính *đối xứng* nếu và chỉ nếu x R y $\Rightarrow$ y R x với mọi $x,y \in X$.

- *Tính phản xứng*

Quan hệ R có tính *phản xứng* nếu và chỉ nếu (x R y và y R x) $\Rightarrow$ x = y với mọi $x,y \in X$.

- *Tính bắc cầu*

Quan hệ R có tính *truyền* hay *bắc cầu* nếu và chỉ nếu (x R y và y R z) $\Rightarrow$ x R z với mọi $x,y,z \in X$.

3. Biểu diễn quan hệ 2 ngôi dưới dạng ma trận

Giả sử R là một quan hệ 2 ngôi giữa một tập hợp hữu hạn $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ và một tập hữu hạn $B = \{ b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Quan hệ R có thể được biểu diễn bởi ma trận MR =

$[m_{ij}]$ gồm m dòng và n cột (tức là ma trận cấp mxn), trong đó mij = 1 nếu (ai, bj) ∈ Rmij = 0 nếu (ai, bj) ∉ RTa gọi ma trận MR là *ma trận biểu diễn* của quan hệ R.

Ví dụ: Với A = { 1,2,3} và B = { a, b, c} , thì các quan hệ sau đây:

R = { (1,a), (1,b), (1,c)}

S = { (1,a), (1,b), (1,c), (2,b), (2,c), (3,c)}

có các ma trận biểu diễn là

$$MR = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad MS = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong trường hợp R là một quan hệ 2 ngôi trên một tập X hữu hạn và có n phần tử thì ma trận biểu diễn của R là một ma trận có n dòng và n cột (tức là ma trận vuông cấp n).

Ghi chú:

Ngoài cách biểu diễn quan hệ dưới dạng ma trận ta còn biểu đồ (dạng đồ thị) để biểu diễn quan hệ. Cách biểu diễn nầy sẽ được xét đến trong phần sau, khi nói về biểu đồ Hasse của một cấu trúc thứ tự.

II. Quan hệ tương đương

1. Khái niệm

Một quan hệ 2 ngôi R trên một tập hợp X được gọi là một *quan hệ tương đương* nếu và chỉ nếu nó thỏa 3 tính chất: phản xạ, đối xứng, truyền.

Ví dụ:

Quan hệ đồng dư modulo n trên **Z**. Ta đã biết quan hệ nầy có 3 tính chất phản xạ, đối xứng, truyền.

Quan hệ ≤ trên **Z** không phải là một quan hệ tương đương vì nó không có tính chất đối xứng.

2. Lớp tương đương và tập hợp thương

Với mỗi phần tử x∈ X, ta định nghĩa *lớp tương đương* chứa x, ký hiệu$\overline{x}$, là tập hợp tất cả những phần tử (thuộc X) có quan hệ R với x:$\overline{x}$= { y ∈ X : y R x }

Như vậy mỗi lớp tương đương là một tập hợp con của X.

Tập hợp các lớp tương đương của quan hệ tương đương R trên X tạo thành một "phân hoạch" của tập hợp X, tức là tập các lớp tương đương khác nhau cho ta một họ các tập con của X rời nhau đôi một và có phần hội bằng X.

Tập hợp các lớp tương đương của quan hệ tương đương R trên Xnầy (là một tập con của P(X)) được gọi là *tập hợp thương* (của quan hệ tương đương R trên X).

Ví dụ

Quan hệ đồng dư modulo n trên **Z** có tập hợp thương tương ứng, được ký hiệu là $\mathbf{Z_n}$, gồm n phần tử :$\mathbf{Z_n} = \{\overline{1};\ \overline{2};\ \overline{3} \ldots\ldots; \overline{n-1}\}$ trong đó $\overline{k}$(k∈ **Z**) là tập hợp tất cả những số nguyên đồng dư với k modulo n.

3. Đồng dư

a. Định nghĩa

Cho n là một số nguyên dương. Ta nói 2 số nguyên a và b đồng dư modulo n nếu các số dư trong phép chia a cho n và chia b cho n bằng nhau. Trong trường hợp nầy ta cũng nói là a đồng dư với b modulo n, và viết:a ≡ b (mod n).

Như vậy, theo định nghĩa ta có:a ≡ b (mod n) ⇔ a mod n = b mod n.

b. Các định lý

- **Định lý 1:** Cho n là một số nguyên dương, a và b là 2 số nguyên tùy ý. Ta có các phát biểu sau đây là tương đương:

  a ≡ b (mod n)

$n \mid (a-b)$ (n chia hết hiệu a và b)

tồn tại một số nguyên k sao cho a = b + k.n

- **Định lý 2.** Cho n là một số nguyên dương. Giả sử $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n}$. Khi đó ta có :

  $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$

  $a.c \equiv b.d \pmod{n}$

- **Hệ quả :**

  Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ thì $k.a \equiv k.b \pmod{n}$ với mọi số nguyên k.

  Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ thì $ak \equiv bk \pmod{n}$ với mọi số nguyên dương k.

- **Định lý 3. (Fermat)** Cho p là một số nguyên tố và a là một số nguyên không phải là bội số của p. Khi đó ta có hệ thức sau:$ap^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$

III. Phép toán số học trên Zn

1. Tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên

Ta dùng ký hiệu **N** để chỉ tập hợp các số tự nhiên, tức là tập hợp các số nguyên không âm. Tập hợp các số nguyên sẽ được ký hiệu là **Z**.

Chúng ta biết rằng trên các tập hợp N và Z có hai phép toán cơ sở: phép cộng (+) và phép nhân (.) thỏa một số tính chất thông thường:

- a + b = b + a
- (a+b)+c = a+(b+c)
- a+0 = a
- với mọi số nguyên a, có duy nhất một số nguyên được ký hiệu là -a thỏa:a + (-a) = 0
- a.b = b.a
- (a.b).c = a.(b.c)
- a.1 = a
- a.(b+c) = a.b + a.c

Trong các tính chất trên các ký hiệu a, b, c là các số tự nhiên hay các số nguyên tùy ý.

Từ tính chất (4), trong tập hợp các số nguyên **Z** ta có một phép toán trừ được định nghĩa như sau : a - b = a + (-b).

Ngoài các tính chất nêu trên các tập hợp **N** và **Z** còn là những tập hợp có thứ tự và đếm được. Quan hệ thứ tự trên **N** và **Z** được ký hiệu bởi ≤ (đọc là: "nhỏ hơn hoặc bằng"). Ngoài ra chúng ta còn dùng một số ký hiệu so sánh khác rất quen thuộc như: "≥ ", "<", ">", "=", "≠ ".

Thứ tự "≤ " trên tập số tự nhiên **N** có một tính chất rất quan trọng được phát biểu trong định lý dưới đây:

Định lý. *Mọi tập hợp con khác rỗng của tập hợp các số tự nhiên N đều có duy nhất một tử nhỏ nhất.*

2. Phép chia số nguyên

a. *Định lý.(Thuật chia Euclide)*

Cho a là một số nguyên bất kỳ và b là một số nguyên khác 0. Khi đó, có duy nhất 2 số nguyên q, r thỏa mãn các điều kiện:

(1) a = b.q + r

(2) $0 \le r < |b|$.

Số q trong định lý trên được gọi là *thương số* của phép chia a cho b; và r được gọi là *dư số* (hay số dư). Thương số trong phép chia a cho b thường được viết dưới dạng: a **div** b, và ký hiệu "div" được dùng để chỉ phép toán chia lấy thương số. Dư số trong phép chia a cho b được viết là: a **mod** b.

b. *Các định nghĩa về sự "chia hết", "chia hết cho", "ước số", "bội số", "ước số chung lớn nhất".*

- Ta nói một số nguyên a *chia hết cho* một số nguyên b (b ≠ 0) khi và chỉ khi số dư trong phép chia a cho b bằng 0. Nói một cách khác, số nguyên a chia hết cho số nguyên b (b ≠ 0) khi và chỉ khi có một số nguyên q sao cho a = q.b. Trong trường hợp nầy ta viết: a⋮b (đọc là: "a chia hết cho b").
  Khi a chia hết cho b, ta cũng có thể nói rằng "b *chia hết* a" và viết:
  b │ a (đọc là: "b chia hết a").
- Ta nói một số nguyên a là*bội số* của một số nguyên b khi và chỉ khi có một số nguyên q thỏa điều kiện: a = q.b. Ở đây ta vẫn dùng cách viết " a⋮b " để chỉ rằng "a là bội số của b". Trong trường hợp nầy ta cũng nói rằng "b là *ước số* của a", và sử dụng cách viết "b │ a".

c. Các mệnh đề về sự "chia hết", "chia hết cho", "ước số", "bội số", "ước số chung lớn nhất".

- **Mệnh đề 1:** Sự chia hết có các tính chất sau đây:
  a│ a với mọi số nguyên a.
  Nếu a│ b và b│ a thì | a | = | b |.

Như vậy trong trường hợp a và b là các số tự nhiên, thì từ điều kiện a│ b và b│ a ta có thể kết luận a = b.

Nếu a│ b và b│ c thì a│ c.

- **Mệnh đề 2:** Cho a, b, c, d là các số nguyên tùy ý. Ta có các tính chất sau:
  a│ 0
  1│ a
  Nếu a│ b và c│ d thì (a.c)│ (b.d)
  Nếu a│ b và a│ c thì a│ (b ± c).
- **Hệ quả**. Từ các tính chất được phát biểu trong mệnh đề trên chúng ta dễ dàng suy ra các hệ quả sau đây:
  Nếu a│ b thì a│ (b.c)
  Nếu a│ b thì an│ bn, với mọi số nguyên dương n.

3. *Ước Số Chung Lớn Nhất và Bội Số Chung Nhỏ Nhất*

*a. **Định nghĩa**: (ước số chung lớn nhất dương)*

Cho a và b là 2 số nguyên không đồng thời bằng 0. Một ước số chung d của a và b (tức là số nguyên vừa là ước số của a vừa là ước số của b) được gọi là *ước số chung lớn nhất* của a và b nếu ước số chung d nầy lớn hơn mọi ước số chung khác của a và b.

Như vậy, ước số chung lớn nhất d của a và b được đặc trưng bởi 2 điều kiện sau đây:

- d│ a và d│ b
- Nếu d'│ a, d'│ b, và d'≠ d thì d' < d.

b. Nhận xét :

Ta có số 1 là một ước số chung của a và b; và mọi ước số chung đều nhỏ hơn hoặc bằng | a |. Do đó tập hợp U gồm các ước số chung của a và b là một tập hợp khác rỗng các số nguyên. Suy ra U có duy nhất một phần tử lớn nhất. Điều nầy chứng tỏ rằng ước số chung lớn nhất của 2 số nguyên a và b (a, b không đồng thời bằng 0) tồn tại, dương, và duy nhất. Ta ký hiệu ước số chung lớn nhất của a và b là: (a,b).

Nếu m ≠ 0 thì (m,0) = |m|.

c. Ghi chú :

Trong đại số, người ta định nghĩa ước số chung lớn nhất của 2 số nguyên a và b là một số nguyên d thỏa mãn 2 điều kiện:

- d│ a và d│ b, và
- Nếu d’│ a và d’│ b thì d’│ d.

Theo định nghĩa nầy thì ước số chung lớn nhất của 2 số nguyên không nhất thiết là một số dương, và ước số chung lớn nhất không duy nhất. Chẳng hạn, 12 và 8 có hai ước số chung lớn nhất là 4 và -4. Tuy nhiên ước số chung lớn nhất dương của 2 số nguyên không đồng thời bằng 0 theo định nghĩa nầy trùng với ước số chung lớn nhất trong định nghĩa ở trên.

d. Định lý:

Giả sử d là ước số chung lớn nhất của 2 số nguyên a và b. Khi đó ta có 2 số nguyên u và v sao cho : d = u.a + v.b

e. Hệ quả :

Cho a và b là 2 số nguyên, ta có:(a,b) = 1 khi và chỉ khi có m,n ∈ **Z** sao cho m.a + n.b = 1.

f. Định nghĩa :

Khi (a,b) = 1, ta nói a và b **nguyên tố cùng nhau**.

*g. **Định nghĩa**: (bội số chung nhỏ nhất dương)*

Cho a và b là 2 số nguyên không đồng thời bằng 0. Một bội số chung M của a và b (tức là số nguyên vừa là bội số của a vừa là bội số của b) được gọi là *bội số chung nhỏ nhất* của a và b nếu M nhỏ hơn mọi bội số chung khác của a và b.

h. Định lý:

Cho a và b là 2 số tự nhiên. Giả sử d là USCLN của a và b, và M là BSCNN của a và b. Khi ấy ta có:a.b = d.M

4. Số nguyên tố và định lý căn bản của số học

*a. **Định nghĩa**: (số nguyên tố dương)*

Một số nguyên dương p được gọi là số nguyên tố nếu 2 điều kiện sau đây được thỏa mãn:

- p ≠ 1
- p chỉ có 2 ước số dương là 1 và p.

Trong trường hợp số nguyên tùy ý, Người ta định nghĩa số nguyên tố như sau:

*b. **Định nghĩa**: (số nguyên tố)*

Một số nguyên p được gọi là số nguyên tố nếu 2 điều kiện sau đây được thỏa mãn:

- p ≠± 1
- với mọi số nguyên a và b, nếu p│ (a.b) thì p│ a hay p│ b.

Nhận xét : Nếu p là một số nguyên tố và p│ ($a_1.a_2$...an) thì tồn tại một i sao cho p│ ai.

c. Định lý căn bản của số học:

Mọi số nguyên lớn hơn 1 đều có thể viết dưới dạng tích của các số nguyên tố (dương). Hơn nữa, cách viết trên là duy nhất (không kể sai khác thứ tự viết các số nguyên tố).

Ví dụ : 128 = 2^7 ; 45 = 3^2.5

IV.Quan hệ thứ tự

1. Định nghĩa quan hệ thứ tự

Một quan hệ 2 ngôi R trên một tập hợp X (khác rỗng) được gọi là một *quan hệ thứ tự* nếu và chỉ nếu nó có 3 tính chất: phản xạ, phản xứng, truyền. Khi đó ta cũng nói tập hợp X là một tập có thứ tự. Nếu có thêm tính chất: với mọi x, y ∈ X ta có xRy hay yRx thì ta nói R là một *quan hệ thứ tự toàn phần* trên X.

Chú ý

Trong trường hợp trên X có nhiều quan hệ thứ tự thì khi xét đến thứ tự trên X ta phải nói rõ thứ tự nào, và ta thường viết tập hợp X có thứ tự dưới dạng một cặp (X,R); trong đó R là quan hệ thứ tự đang xét trên X.

Với 2 tập hợp có thứ tự X và Y ta có thể định ra một thứ tự trên tích Descartes XxY dựa vào các thứ tự trên X và trên Y. Từ đó ta XxY trở thành một tập hợp thứ tự.

Nếu (X,R) là một tập hợp có thứ tự và A ⊂ X thì quan hệ thứ tự R thu hẹp trên tập A, cũng được ký hiệu là R (nếu không gây ra nhầm lẫn), là một quan hệ thứ tự trên A. Nói một cách khác, ta có:(X,R) thứ tự và A ⊂ X ⇒ (A,R) thứ tự

2. Định nghĩa phần tử nhỏ nhất, lớn nhất, tối tiểu, tối đại.

Cho (X, ≤) là một tập hợp có thứ tự, và A ⊂ X.

- Ta gọi một phần tử a ∈ A là một *phần tử nhỏ nhất* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi x ∈ A ta có : a ≤ x.
- Ta gọi một phần tử a ∈ A là một *phần tử lớn nhất* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi x ∈ A ta có : x ≤ a.
- Ta gọi một phần tử a ∈ A là một *phần tử tối tiểu* của tập hợp A nếu và chỉ nếu không tồn tại x ∈ A sao cho x ≠ a và x ≤ a.
- Ta gọi một phần tử a ∈ A là một *phần tử tối đại* của tập hợp A nếu và chỉ nếu không tồn tại x ∈ A sao cho x ≠ a và a ≤ x.

Chú ý

- Phần tử nhỏ nhất (lớn nhất) của một tập hợp, nếu có, là duy nhất.Ta ký hiệu phần tử nhỏ nhất của một tập hợp A là min A hay min (A), và ký hiệu phần tử lớn nhất của A là max A hay max (A).
- Phần tử tối tiểu (tối đại) của một tập hợp có thứ tự không nhất thiết là duy nhất.
- Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của một tập hợp, nếu có, là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất của tập hợp đó.

3. Định nghĩa chặn trên, chặn dưới của một tập hợp:

Cho (X, ≤) là một tập hợp có thứ tự, và A ⊂ X.

- Ta gọi một phần tử x ∈ X là một *chặn dưới* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi a ∈ A ta có : x ≤ a. *Chặn dưới lớn nhất* (nếu có), tức là phần tử lớn nhất trong tập hợp tất cả những chặn dưới của A được ký hiệu là **inf (A)**.
- Ta gọi *một* phần tử x ∈ X là một *chặn trên* của tập hợp A nếu và chỉ nếu với mọi a ∈ A ta có : a ≤ x. *Chặn trên nhỏ nhất* (nếu có), tức là phần tử nhỏ nhất trong tập hợp tất cả những chặn trên, của A được ký hiệu là **sup (A)**.

Nhận xét : Nếu trong một tập hợp A tồn tại phần tử max(A) thì đó cũng chính là sup(A). Tương tự, nếu trong một tập hợp A tồn tại phần tử min(A) thì đó cũng chính là inf(A).

4. Định nghĩa tập có thứ tự tốt:

Một tập hợp có thứ tự được gọi là có *thứ tự tốt* (hay được sắp tốt) nếu và chỉ nếu mọi tập con khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất.

V. Biểu đồ Hasse

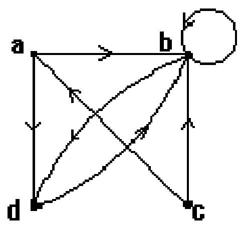
1. Đồ thị định hướng (directed graph).

Một *đồ thị định hướng* gồm một tập hợp các đỉnh cùng với một tập hợp các cặp đỉnh được gọi là các cạnh (hay các cung).

Đồ thị biểu diễn cho một quan hệ 2 ngôi R trên một tập hợp X có tập hợp các đỉnh chính là X, và tập hợp các cung chính là R. Nếu (a,b) ∈ R thì trên biểu đồ ta vẽ một cung hướng từ đỉnh a đến đỉnh b.

Đồ thị định hướng tương ứng của một quan hệ hai ngôi trên một tập hợp sẽ cung cấp cho ta những thông tin về quan hệ một cách rất trực quan. Do đó người ta thường sử dụng các đồ thị định hướng để nghiên cứu các quan hệ và các tính chất của chúng.

Ví dụ: X = { a,b,c,d} , R = { (a,d), (b,b), (b,d), (c,a), (c,b), (d,b)} . Đồ thị định hướng (X,R) có thể được vẽ ra như sau:



Cạnh (b,b) được vẽ trên biểu đồ bởi cung xuất phát từ đỉnh b và quay trở lại chính đỉnh b. Cạnh nầy được gọi là một "vòng" tại b.

Chúng ta có thể thấy rằng một quan hệ 2 ngôi trên một tập hợp là đối xứng khi và chỉ khi trên đồ thị biểu diễn tương ứng mỗi cặp đỉnh đều có 2 cung nối theo 2 hướng ngược nhau. Như vậy đồ thị của quan hệ trong ví dụ trên ta kết luận quan hệ nầy không có tính đối xứng.

2. Đồ thị định hướng (directed graph).

Đối với một tập hợp X (hữu hạn) có thứ tự ρ thì trên đồ thị định hướng tương ứng có nhiều cạnh không nhất thiết phải vẽ ra bởi vì chúng được hiểu ngầm. Nói một cách khác, các tính chất của quan hệ thứ tự giúp ta biết được có những cạnh đương nhiên có trên đồ thị của quan hệ; và những cạnh đó sẽ không được vẽ ra trên đồ thị.

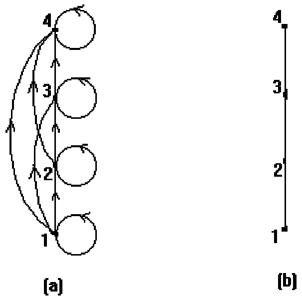
Trước hết ta thấy rằng tại mỗi đỉnh của đồ thị phải có một vòng do tính phản xạ của quan hệ thứ tự, nên các vòng nầy sẽ không được vẽ ra trên đồ thị. Ngoài ra quan hệ thứ tự còn có tính truyền, nên ta sẽ không cần vẽ ra cạnh (a,c) nếu trên đồ thị có các cạnh (a,b) và (b,c) với b là một đỉnh nào đó. Hơn nữa, nếu (a,b), (b,c), và (c,d) là các cạnh thì ta cũng loại ra cạnh (a,d). Chúng ta cũng không ghi mũi tên định hướng trên các cạnh với qui ước rằng : *các đỉnh của đồ thị được bố trí trên hình vẽ sao cho hướng mũi tên của các cạnh là "hướng lên".*

Đồ thị định hướng (dạng biểu đồ) tương ứng của tập hợp có thứ tự (X, ρ) có thể được rút gọn lại thành một biểu đồ đơn giản hơn nhưng vẫn hàm chứa đầy đủ những thông tin của thứ tự ρ trên tập hợp X, bằng cách là ta chỉ vẽ cung nối từ đỉnh x đến đỉnh x' (x' khác x) khi ta có x ρ x', và không tồn tại y khác x và x' sao cho x ρ y và y ρ x'. ***Biểu đồ ở dạng rút gọn nầy được gọi là biểu đồ Hasse của tập hợp có thứ tự (X, ρ).***

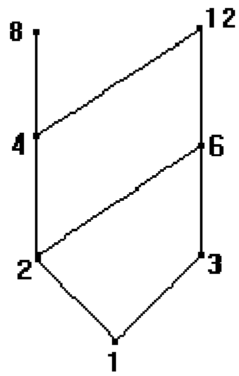
Ví dụ:

Xét thứ tự ≤ thông thường trên tập hợp X = { 1,2,3,4} .

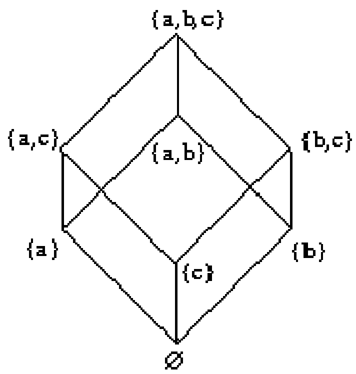
Đồ thị đầy đủ của (X, ≤) có dạng trong hình (a) dưới đây. Hình (b) là dạng rút gọn của đồ thị, tức là biểu đồ Hasse của thứ tự ≤ trên X.



- Vẽ biểu đồ Hasse biểu diễn thứ tự “chia hết”, được ký hiệu là $|$, trên tập hợp { 1,2,3,4,6,8,12} .
  Bắt đầu từ đồ thị định hướng của thứ tự nầy, ta loại bỏ các vòng tại các đỉnh. Sau đó loại bỏ các cạnh có thể được suy ra bởi tính chất truyền của thứ tự : (1,4), (1,6), (1,8), (1,12), (2,8), (2,12) và (3,12). Cuối cùng ta được biểu đồ Hasse gồm các cạnh (1,2), (1,3), (2,4), (2,6), (3,6), (4,8), (4,12), và (6,12) :



- Vẽ biểu đồ Hasse cho thứ tự $\subset$ trên tập hợp P(E), trong đó E = { a,b,c} .
  Cũng làm tương tự như trong ví dụ trước ta loại bỏ các cạnh sau đây từ đồ thị biểu diễn cho thứ tự: (∅ ,{ a,b}), (∅ ,{ a,c}), (∅ ,{ b,c}), (∅ ,{ a,b,c}), ({ a} ,{ a,b,c}), ({ b} ,{ a,b,c}), và ({ c} ,{ a,b,c}). Từ đó ta có biểu đồ Hasse được vẽ như sau :



Chú ý

Chúng ta còn có một cách khác để nêu lên khái niệm biểu đồ Hasse cho một cấu trúc thứ tự (X,ρ) bằng cách đưa ra một khái niệm *trội trực tiếp*: Cho x ∈ X, một phần tử y ∈ X được gọi là một trội trực tiếp của x nếu và chỉ nếu ta có 2 điều kiện sau đây :

(1) x ρ y (y là một chặn trên của x),

(2) Với mọi z, nếu x ρ z và z ρ y thì z = x hay z = y.

Biểu đồ Hasse cho cấu trúc thứ tự (X,ρ) là một đồ thị định hướng có tập hợp đỉnh là X và tập hợp các cạnh là một phần của ρ gồm các cạnh (a,b) sao cho b là một trội trực tiếp của a.

Chương 4 : ĐẠI SỐ BOOLE

I. Phép toán

1. Định nghĩa phép toán2 ngôi

Cho X là một tập hợp khác rỗng. Một phép toán hai ngôi trên tập hợp X là một ánh xạ T đi từ XxX vào X.

Ký hiệu của ánh xạ được gọi là ký hiệu của phép toán hay là một toán tử.

Ảnh của cặp (a,b) qua ánh xạ T được gọi là kết quả thực hiện phép toán T trên 2 phần tử a và b, và thường được viết là a T b.

Như vậy, nếu T là một phép toán 2 ngôi trên X thì ta có ánh xạ:

T : $XxX \to X$

$(a,b) \mapsto T(a,b) = a\ T\ b.$

2. Định nghĩa phép toán 1 ngôi

Cho X là một tập hợp khác rỗng. Một phép toán 1 ngôi trên tập hợp X là một ánh xạ T đi từ X vào X.

Ký hiệu của ánh xạ được gọi là ký hiệu của phép toán hay là một toán tử.

Ảnh của a qua ánh xạ T được gọi là kết quả thực hiện phép toán T trên phần tử a.

Ví dụ

Cho E là một tập hợp. đặt X = P(E) (tập các tập con của E). Trên X có các phép toán tập hợp thông thường :

Phép giao hai tập hợp, được ký hiệu là $\cap$.

Phép hội hai tập hợp, được ký hiệu là $\cup$.

Phép lấy bù của một tập hợp, được ký hiệu là $C_X A$.

Phép toán $\cap$ và $\cup$ là các phép toán 2 ngôi, phép toán $\boldsymbol{C_X A}$ là phép toán 1 ngôi.

3. Các chú ý

Một cách tổng quát, ta có thể định nghĩa phép toán n-ngôi trên một tập hợp X là một ánh xạ đi từ X^n vào X. Ứng với mỗi bộ n phần tử $(a_1, \dots, a_n)$ phép toán sẽ cho ta một phần tử kết quả thuộc X.

Trong trường hợp tập hợp X là hữu hạn thì người ta có thể định nghĩa hay xác định phép toán bằng cách liệt kê kết quả thực hiện phép toán cho mọi trường hợp có thể có.

Ví dụ X = { a_1, ... , an } gồm n phần tử. Giả sử * là một phép toán 2 ngôi trên X. Khi đó, phép toán * có thể được xác định bởi bảng sau đây:

*	a_1	…	aj	…	an
a_1			:		
:			:		
ai	…	…	ai* aj		
:					
an					

Bảng trên được gọi là *bảng Cayley* của phép toán 2 ngôi. Như vậy ứng với mỗi phép toán 2 ngôi trên X ta có một ma trận có cấp n với phần tử ở dòng i cột j bằng ai* aj. Về sau, nhiều tính chất của phép toán sẽ được xem xét thông qua ma trận nầy.

Chúng ta đã từng thấy những phép toán 2 ngôi được định nghĩa bằng bảng như thế; đó là các phép toán logic $\vee$ (hay), $\wedge$ (và), $\to$ (kéo theo).

4. Các tính chất đại số của phép toán 2 ngôi

a. Định nghĩa 1.

Ta nói một phép toán 2 ngôi T trên một tập hợp X có tính *giao hoán* nếu

$$\forall\, x,y \in X : x\, T\, y = y\, T\, x$$

Ta nói một phép toán 2 ngôi T trên một tập hợp X có tính *kết hợp* nếu

$$\forall\, x,y,z \in X : x\, T\, (y\, T\, z) = (x\, T\, y)\, T\, z$$

b. *Định nghĩa 2.*

Cho X là một tập hợp khác rỗng, * là một phép toán 2 ngôi trên X.

- Phép toán * được gọi là lũy đẳng khi và chỉ khi $x * x = x$, với mọi $x \in X$
- Một phần tử $e \in X$ được gọi là *phần tử trung hòa* của phép toán * trên X khi và chỉ khi $x * e = e * x = x$, với mọi $x \in X$
- Giả sử phép toán * có phần tử trung hòa là e. Ta nói một phần tử $x \in X$ là khả *nghịch* (hay có nghịch đảo) khi và chỉ khi $\exists\, x' \in X : x * x' = e = x' * x$

Nhận xét :

- Nếu phép toán có tính kết hợp thì phần tử trung hòa (nếu có) là duy nhất, và trong trường hợp tổng quát người ta còn gọi là "phần tử đơn vị".
- Khi phép toán có tính kết hợp và có phần tử trung hòa, với mỗi phần tử x khả nghịch, phần tử x' trong định nghĩa trên là duy nhất. Ta gọi x' là phần tử nghịch đảo của x, và ký hiệu là x^{-1}.

Ghi chú :

- Trong trường hợp phép toán được ký hiệu là '.' (dấu nhân) thì phần tử trung hòa của phép toán thường được ký hiệu 1, và được gọi là "đơn vị".
- Khi phép toán được ký hiệu là '+' (dấu cộng) thì phần tử trung hòa của phép toán thường được ký hiệu 0, và được gọi là "zero". Trong trường hợp nầy, mỗi phần tử x thỏa điều kiện khả nghịch sẽ được gọi là "có đối", và phần tử x' trong định nghĩa được gọi là phần tử đối của x. Ta ký hiệu phần tử đối của x là -x.

Các Ví dụ:

- Trên tập B = { 0,1} (gồm 2 giá trị Boole), có các phép toán $\vee$ và $\wedge$. Phép toán V có các tính chất : giao hoán, kết hợp, có trung hòa là 0, lũy đẳng. Phần tử 1 không khả nghịch đối với phép $\vee$ vì $1 \vee x = 1 \neq 0$ với mọi $x \in B$. Phép toán $\wedge$ có các tính chất : giao hoán, kết hợp, có trung hòa là 1, lũy đẳng. Phần tử 0 không khả nghịch đối với phép $\wedge$ vì $0 \wedge x = 0 \neq 1$ với mọi $x \in B$.
- Phép toán + (cộng) trên các tập hợp số **N, Z, Q, R, C** có các tính chất : giao hoán, kết hợp, có trung hòa (hay phần tử zero) là 0. Trong các tập hợp **Z, Q, R, C** mọi số đều có đối. Phép toán * (nhân) trên các tập hợp số **N, Z, Q, R, C** có các tính chất : giao hoán, kết hợp, có trung hòa (hay phần tử đơn vị) là 1. Trong các tập hợp **Q, R, C** mọi số khác 0 đều khả nghịch

c. *Định lý 1.*

Cho * là một phép toán 2 ngôi giao hoán, kết hợp và lũy đẳng trên một tập hợp X. Khi đó, nếu R là quan hệ 2 ngôi trên X được định nghĩa bởi $(a\, R\, b) \Leftrightarrow (a * b = b)$ thì ta có : R là một quan hệ thứ tự. $\forall\, a,b \in X : \sup(a,b) = a * b$.

5. Định nghĩa phân bố bên trái, phải của phép toán 2 ngôi.

- Cho T và * là hai phép toán 2 ngôi trên một tập hợp X. Ta nói phép toán * phân bố bên trái trên phép toán T khi và chỉ khi $a * (b\, T\, c) = (a * b)\, T\, (a * c)$ với mọi $a, b, c \in X$.
- Tương tự, ta nói * phân bố bên phải trên T khi và chỉ khi $(b\, T\, c) * a = (b * a)\, T\, (c * a)$ với mọi $a, b, c \in X$.
- Khi * phân bố bên trái và bên phải trên T thì ta nói chung là * phân bố trên T.

Ví dụ:

- Trên tập hợp các số thực **R**, phép toán * (nhân) là phân bố trên phép toán +. Nhưng phép + không phân bố trên phép *.
- Cho E là một tập hợp. Trên P(E) ta biết có 2 phép toán được ký hiệu là $\cup$ và $\cap$. Theo các tính chất của các phép toán tập hợp, ta có phép toán $\cap$ phân bố trên $\cup$, tức là $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$với mọi A, B, C $\in$ P(E). Ngược lại, phép toán $\cup$ cũng phân bố trên phép toán $\cap$.

6. Định nghĩa Cấu trúc đại số.

Một *đại số*(hay một cấu trúc đại số) là một tập hợp khác rỗng X trên đó có một hay nhiều phép toán thỏa mãn các tính chất nào đó. Giả sử các phép toán tên X là *, T, ... Ta sẽ ký hiệu đại số là (X, *, T, ...).

II. Đại số boole

1. Định nghĩa đại số Boole

Tập hợp khác rỗng S cùng với các phép toán ký hiệu nhân (.), cộng (+), lấy bù (’) được gọi là một đại số Boole nếu các tiên đề sau đây được thoả mãn với mọi a, b, c$\in$S.

a. *Tính giao hoán:*

a) a.b = b.a,
b) a+b = b+a.

b. *Tính kết hợp:*

a) (a.b).c = a.(b.c),
b) (a+b)+c = a+(b+c).

c. *Tính phân phối:*

a) a.(b+c) = (a.b)+(a.c),
b) a+(b.c) = (a+b).(a+c).

d. *Tồn tại phần tử trung hoà:*

Tồn tại hai phần tử khác nhau của S, ký hiệu là 1 và 0 sao cho:

a) a.1 = 1.a = a,
b) a+0 = 0+a = a.

1 gọi là phần tử trung hoà của phép . 0 gọi là phần tử trung hoà của phép +.

e. *Tồn tại phần tử bù:*

Với mọi a $\in$ S, tồn tại duy nhất phần tử a’$\in$ S sao cho:

a) a.a’ = a’.a = 0,
b) a+a’ = a’+a = 1.

a’ gọi là phần tử bù của a.

f. *Các thí dụ*

- Đại số lôgic là một đại số Boole, trong đó S là tập hợp các mệnh đề, các phép toán $\wedge$ (hội), $\vee$ (tuyển), – (phủ định) tương ứng với . , +, ’, các hằng đ (đúng), s (sai) tương ứng với các phần tử trung hoà 1, 0.
- Đại số tập hợp là một đại số Boole, trong đó S là tập hợp P(X) gồm các tập con của tập khác rỗng X, các phép toán $\cap$ (giao), $\cup$ (hợp), – (bù) tương ứng với . , +, ’, các tập X, Ø tương ứng với các phần tử trung hoà 1, 0.
- Cho B= {0,1}, các phép toán . , +, ’ trên B được định nghĩa như sau:

1.1 = 1,	1+1 = 1,	1’ = 0,	
1.0 = 0,	1+0 = 1,	0’ = 1.	(1)
0.1 = 0,	0+1 = 1,		

0.0 = 0, 0+0 = 0,

Khi đó B là một đại số Boole. Đây cũng chính là đại số lôgic, trong đó 1, 0 tương ứng với đ (đúng), s (sai). Mỗi phần tử 0,1 của B gọi là một bit. Ta thường viết $\bar{x}$ thay cho *x'*.

Chú ý:

- Trước hết cần lưu ý điều quan trọng sau đây: các tiên đề của đại số Boole được xếp theo từng cặp a) và b). Từ mỗi tiên đề a), nếu ta thay . bởi +, thay + bởi ., thay 1 bởi 0 và thay 0 bởi 1 thì ta được tiên đề b) tương ứng.
- Ta gọi cặp tiên đề a), b) là đối ngẫu của nhau. Do đó nếu ta chứng minh được một định lý trong đại số Boole thì ta có ngay một định lý khác, đối ngẫu của nó, bằng cách thay . và 1 tương ứng bởi + và 0 (và ngược lại). Ta có:

Quy tắc đối ngẫu: *Đối ngẫu của một định lý là một định lý.*

Định lý:

Tính nuốt a) a.0 = 0, b) a+1 = 1	*Tính luỹ đẳng* a) a.a = a, b) a+a = a.	*Hệ thức De Morgan* a) (a.b)' = a'+b', b) (a+b)' = a'.b'.
Phần bù a) 1' = 0, b) 0' = 1.	*Hệ thức bù kép* (a')' = a.	*Tính hút* a) a.(a+b) = a, b) a+(a.b) = a.

III. Hàm boole

1. Định nghĩa hàm Boole

Cho 2 tập hợp B = {0, 1} và $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B, 1 \le i \le n\}$, ở đây B và B^n là các đại số Boole. Biến x được gọi là một biến Boole nếu nó nhận các giá trị chỉ từ B.

Một *hàm Bool* theo n biến là một ánh xạ

$$f : B^n \to B$$
$$(x_1, x_2, \ldots, xn) \to f(x_1, x_2, \ldots, xn)$$

Từ định nghĩa trên ta thấy một hàm Bool có thể được xác định bằng cách liệt kê dưới dạng bảng, gọi là bảng giá trị của hàm Bool, hay bằng cách cho một biểu thức Bool.

Ví dụ: Cho f và g : $B^3 \to B$ là các hàm Bool (theo 3 biến x, y, z) xác định bởi

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

và g(x,y,z) = xy + z.

2. Các phép toán hàm Boole:

Từ các phép toán cộng, nhân và bù trên B ta định nghĩa các phép toán cộng, nhân và bù trên các hàm Bool theo n biến như sau:

- $\bar{f}(x_1, x_2, \ldots, xn) = 1 - f(x_1, x_2, \ldots, xn)$ = bù của $f(x_1, x_2, \ldots, xn)$
- $(f+g)(x_1, x_2, \ldots, xn) = f(x_1, x_2, \ldots, xn) + g(x_1, x_2, \ldots, xn)$

- (f.g) $(x_1, x_2, \ldots, xn) = f(x_1, x_2, \ldots, xn) . g(x_1, x_2, \ldots, xn)$
- Tương tự như các phép toán trên B, các phép toán trên các hàm Bool nầy cũng có các tính chất như : Luật phủ định của phủ định; Luật lũy đẳng; Luật về phần tử trung hòa; Luật về phần tử trung bù; Luật giao hoán; Luật kết hợp; Luật phân bố; Luật De Morgan; Luật thống trị.

Ví dụ: Dưới đây là một số ví dụ áp dụng các luật trong việc biến đổi các biểu thức Bool.

$$x + xy = x1 + xy = x(1+y) = x\ 1 = x$$

$$\begin{aligned} wx + \overline{\overline{x}z} + y + \bar{z} &= wx + (\bar{\bar{x}} + \bar{z}) + y + \bar{z} \\ &= wx + (x + \bar{z}) + y + \bar{z} \\ &= (wx + x) + y + \bar{z} + \bar{z} \\ &= x + y + \bar{z} \end{aligned}$$

IV.Biểu diễn hàm Boole:

1. Định nghĩa:

Cho n là một số nguyên dương và f là một hàm Bool theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ta nói

- Mỗi biểu thức Bool (hay hàm Bool) có dạng x_i hoặc là một từ đơn.
- Một biểu thức Bool là một tích cơ bản nếu nó có dạng $y_1y_2\ldots y_n$ với $y_i = x_i$ hoặc với mọi i = 1, 2, …, n.
- Một biểu diễn của f dưới dạng tổng của các tích cơ bản là dạng chính tắc tuyển của f, viết tắc là d.n.f (disjunctive normal form) của f.

2. Mệnh đề:

Mọi hàm Bool f khác 0 đều có thể viết một cách duy nhất (không kể sai khác về thứ tự trước sau của các tích cơ bản dưới dạng d.n.f).

Ví dụ: Tìm d.n.f của hàm Bool f: $B^3 \rightarrow B$ với f(x,y,z) = xy +

Ta có thể lập bảng giá trị của f như sau:

x	y	Z	xy		f
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

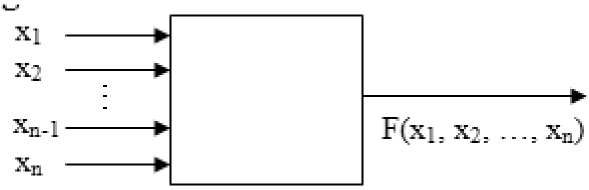
Cột giá trị của f có 4 giá trị (ứng với 4 trường hợp về giá trị của x, y, z) là 1. Chúng chỉ ra 4 tích cơ bản trong d.n.f của f, và từ đó ta có:f(x,y,z) =

Một cách khác để giải quyết bài toán nầy là sử dụng các tính chất của các phép toán Bool, ta có : xy + =xy(z+ + (y+)z

=

V. Mạng các cổng

1. Cổng Logic



Xét một thiết bị như hình trên, có một số đường vào (dẫn tín hiệu vào) và chỉ có một đường ra (phát tín hiệu ra). Giả sử các tín hiệu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ta gọi là đầu vào hay input) cũng như tín hiệu ra F (đầu ra hay output) đều chỉ có hai trạng thái khác nhau, tức là mang một bit thông tin, mà ta ký hiệu là 0 và 1.

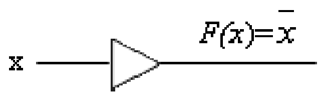
Ta gọi một thiết bị với các đầu vào và đầu ra mang giá trị 0, 1 như vậy là một mạch lôgic.

Đầu ra của một mạch lôgic là một hàm Boole F của các đầu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ta nói mạch lôgic trong hình trên thực hiện hàm F.

Các mạch lôgic được tạo thành từ một số mạch cơ sở, gọi là cổng lôgic.

2. *Một số cổng logic thường gặp*

a. *Cổng NOT:*



Cổng NOT thực hiện hàm phủ định. Cổng chỉ có một đầu vào.

Đầu ra *F(x)* là phủ định của đầu vào *x*.

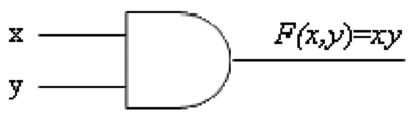
$$F(x) = \bar{x} = \begin{cases} 0 \; khi \; x = 1, \\ 1 \; khi \; x = 0. \end{cases}$$

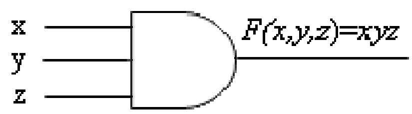
Chẳng hạn, xâu bit 100101011 qua cổng NOT cho xâu bit 011010100.

b. *Cổng AND:*

Cổng AND thực hiện hàm hội. Đầu ra *F(x,y)* là hội (tích) của các đầu vào.

$$F(x, y) = xy = \begin{cases} 1 \; khi \; x = y = 1, \\ 0 \text{ trong các truong hop khác} \end{cases}$$



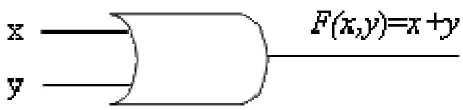


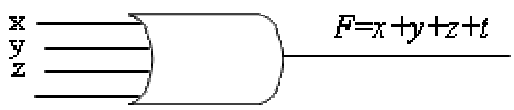
Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010110 qua cổng AND cho 101000100.

c. *Cổng OR:*

Cổng OR thực hiện hàm tuyển (tổng). Đầu ra *F(x,y)* là tuyển (tổng) của các đầu vào.

$$F(x, y) = x + y = \begin{cases} 1 \; khi \; x = 1 \; hay \; y = 1, \\ 0 \; khi \; x = y = 0. \end{cases}$$





Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010100 qua cổng OR cho 111011101.

3. *Mạch logic*

a. *Tổ hợp các cổng:*

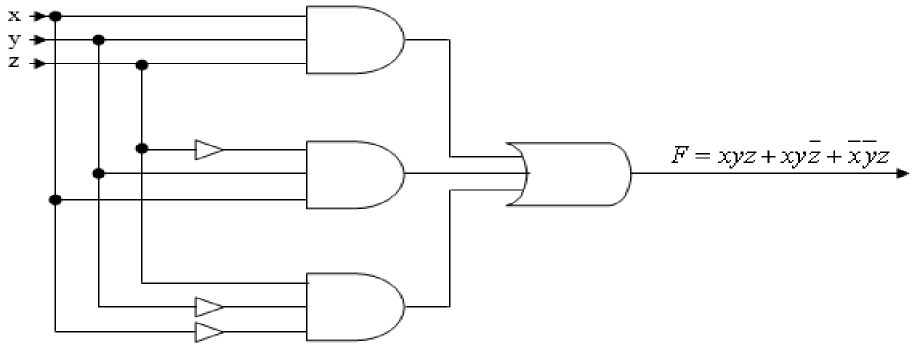
Các cổng lôgic có thể lắp ghép để được những mạch lôgic thực hiện các hàm Boole phức tạp hơn. Như ta đã biết rằng một hàm Boole bất kỳ có thể biểu diễn bằng một biểu thức chỉ chứa các phép –, ., +. Từ đó suy ra rằng có thể lắp ghép thích hợp các cổng NOT, AND, OR để được một mạch lôgic thực hiện một hàm Boole bất kỳ.

Thí dụ: Xây dựng một mạch lôgic thực hiện hàm Boole cho bởi bảng sau.

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Theo bảng này, hàm F có dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc hoàn toàn là:
$F(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$.

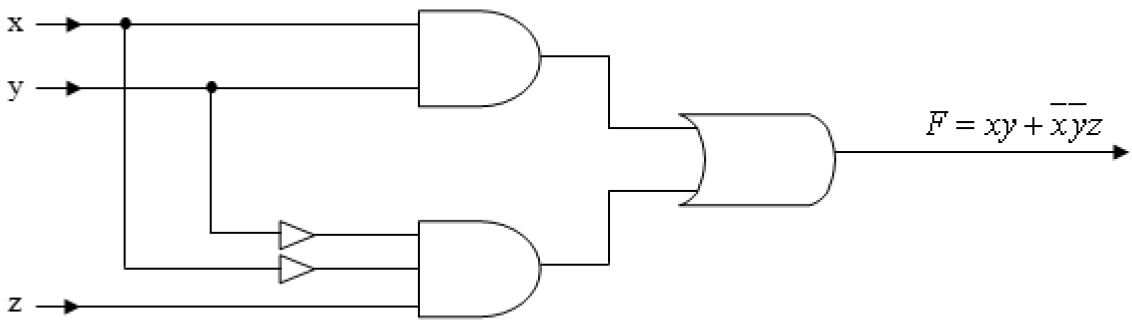
Hình dưới đây vẽ mạch lôgic thực hiện hàm F đã cho.



Biểu thức của *F(x, y, z)* có thể rút gọn:

$$xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z = xy(z + \bar{z}) + \bar{x}\bar{y}z = xy + \bar{x}\bar{y}z.$$

Hình dưới đây cho ta mạch lôgic thực hiện hàm $xy + \bar{x}\bar{y}z$.



Hai mạch lôgic trong hai hình trên thực hiện cùng một hàm Boole, ta nói đó là hai mạch lôgic tương đương, nhưng mạch lôgic thứ hai đơn giản hơn.

VI.Công thức đa thức tối tiểu

Đối với các dạng công thức đa thức của một hàm Bool ta thường quan tâm đến các dạng *công thức đa thức tối tiểu*. Một cách trực quan ta gọi một công thức đa thức (D) của một hàm Bool f là tối tiểu khi không có công thức nào khác của f đơn giản hơn nó theo nghĩa sau đây:

- Bất kỳ một sự biến đổi nào trên công thức (D) đều dẫn đến một công thức không phải là công thức đa thức, và
- Nếu f có thể viết dưới một dạng công thức đa thức (D') khác thì số số hạng của (D') lớn hơn hoặc bằng số số hạng của (D) và ta có thể chọn ra các số hạng u' (tức là một đơn thức) trong công thức (D') tương ứng với các số hạng u trong công thức (D) sao cho số "thừa số" trong u' là lớn hơn hoặc bằng số thừa số trong u.

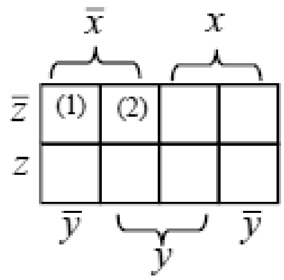
Để tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm Bool với số biến nhỏ hơn hoặc bằng 6 ta có thể sử dụng các biểu đồ Karnaugh.

VII. Biểu đồ Karnaugh

1. *Khái niệm*

Cho hàm Boole *f* theo n biến. Biểu đồ Karnaugh của hàm *f* là một hình chữ nhật gồm 2^n ô sao cho:

- Mỗi ô sẽ tương ứng với một dòng trong bảng của *f*.
- Một ô sẽ được đánh dấu nếu và chỉ nếu tại dòng tương ứng với nó trong bảng chân trị, giá trị của *f* bằng 1.
- Các ô được cho tương ứng với các dòng sao cho hai dòng tương ứng vớihai ô cạnh nhau luôn sai khác nhau về giá trị của chỉ một biến duy nhất.



hình vẽ sau đây là cách tổ chức biểu đồ Karnaugh cho một hàm Boole theo 3 biến.

Các ô được xác định tương ứng với các dòng dựa vào cách đánh địa chỉ của các biến như trong hình vẽ. Chẳng hạn như ô (1) có địa chỉ là $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, do đó, nó sẽ tương ứng với dòng {x=0,y=0,z=0} trong bảng chân trị. Hoặc, ô (2) có địa chỉ là $\bar{x}, y, \bar{z}$ và nó tương ứng với dòng {x=0,y=1,z=0}. Rõ ràng ô (1) và (2) là hai ô cạnh nhau và nó cũng tương ứng với hai dòng trong bảng chân trị chỉ sai khác nhau giá trị của biến *y*.

2. *Chú ý:*

- Có nhiều cách bố trí vị trí của các biến khác nhau, miễn sao phải đảm bảo được những yêu cầu của một biểu đồ Karnaugh.
- Hai ô nằm biên vẫn được coi là hai ô cạnh nhau (tưởng tượng rằng biểu đồ Karnaugh được cuốn lại).

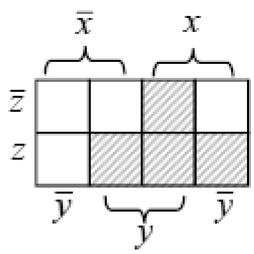
3. *Định nghĩa.*

Cho biểu đồ Karnaugh của một hàm Boole *f* theo n biến. Ta định nghĩa:

- Một tế bào là một hình chữ nhật gồm 2k ($0 \le k \le n$) ô được đánh dấu liền nhau.
- Một tế bào lớn là một tế bào mà không bị phủ bởi bất cứ tế bào nào khác.

Ví dụ : Hàm Boole có 3 biến f(x;y;z) có bảng chân trị như sau :

x	y	z	*f*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



biểu đồ Karnaugh của hàm Boole *f* này như hình 2, ta có

Các tê bào $x.\bar{y}.\bar{z}$, $\bar{x}y\bar{z}$, $x.\bar{y}.z$, xyz (tế bào 1 ô); xy, yz, xz (tế bào 2 ô)

Các tế bào lớn xy, yz, xz (tế bào 2 ô)

4. *Phương pháp Karnaugh tìm công thức đa thức tối tiểu của hàm Boole.*

Cho hàm Boole *f* (dưới dạng công thức hoặc bảng chân trị), để tìm công thức đa thức tối tiểu của *f* , ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1.** Xây dựng biểu đồ Karnaugh của *f*
- **Bước 2.** Xác định tất cả các tế bào lớn trong biểu đồ Karnaugh vừa xây dựng
- **Bước 3.** Tìm một số lượng ít nhất các tế bào lớn để phủ kín các ô đã đánh dấu trong biểu đồ Karnaugh, ghép chúng lại với nhau bằng phép +, ta sẽ được công thức đa thức tối tiểu cần tìm.

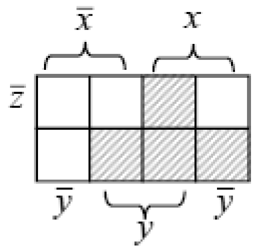
5. *Các ví dụ.*

a. *Ví dụ 1 :*

Cho hàm Boole *f* có bảng chân trị dưới đây. Hãy tìm công thức đa thức tối tiểu của *f*.

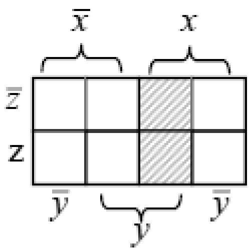
x	y	z	*f*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Bước 1. Xây dựng biểu đồ Karnaugh của hàm *f:*

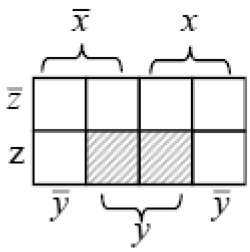


Bước 2. Xác định tất cả các tế bào lớn: *xy, yz, xz*

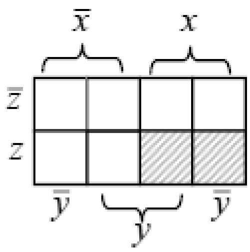
Bước 3. Tìm một số lượng ít nhất các tế bào lớn để phủ các ô đã được đánh dấu. Tưởng tượng rằng chúng ta có thể tách riêng các tế bào lớn, khi đó hình ảnh về các tế bào lớn như sau:



Tế bào lớn *xy*



Tế bào lớn *yz*



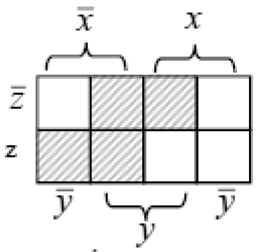
Tế bào lớn *xz*

Như vậy thực chất việc chọn các tế bào lớn để phủ kín các ô được đánh dấu trong biểu đồ Karnaugh chính là việc chọn các tế bào lớn rồi xếp chồng chúng lên nhau sao cho hình thu được giống biểu đồ Karnaugh ban đầu. Trong ví dụ trên, rõ ràng là trong trường hợp này, ta phải chọn cả 3 tế bào lớn. Như vậy, công thức đa thức tối tiểu của hàm *f* này sẽ là: $f = xy + yz + xz$

b. *Ví dụ 2 :*

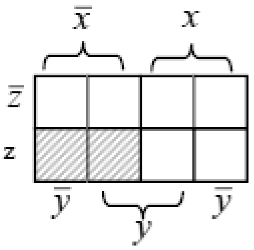
Cho hàm Boole $f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y + x.y.\bar{z}$. Hãy tìm công thức đa thức tối tiểu của *f*.

Bước 1. Xây dựng biểu đồ Karnaugh của hàm *f:*

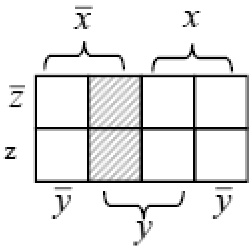


Bước 2. Xác định tất cả các tế bào lớn: $\bar{x}.z$; $\bar{x}.y$; $y.\bar{z}$

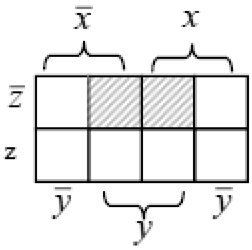
Bước 3. Tìm một số lượng ít nhất các tế bào lớn để phủ các ô đã được đánh dấu.



Tế bào lớn $\bar{x}.z$



Tế bào lớn $\bar{x}.y$



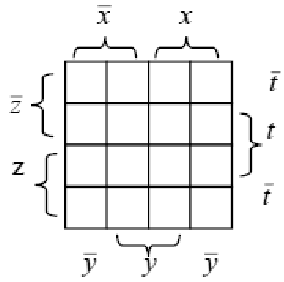
Tế bào lớn $y.\bar{z}$

Mặc dù có 3 tế bào lớn, nhưng trong trường hợp này, để phủ kín các ô đã đánh dấu trong bản đồ Karnaugh, ta chỉ cần chọn 2 tế bào lớn: $\bar{x}.z$; $y.\bar{z}$

Như vậy, công thức đa thức tối tiểu của hàm *f* này sẽ là: $\bar{x}.z + y.\bar{z}$

c. *Áp dụng cho hàm boole 4 biến*

Đối với hàm Boole theo 4 biến, biểu đồ Karnaugh sẽ bao gồm 16 ô được sắp xếpnhư dưới đây:

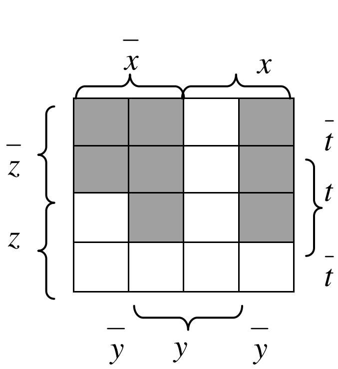


Chú ý: Đối với biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 4 biến, hai ô ở trên cùng và dưới cùng (của cùng một cột) vẫn được coi là cạnh nhau, 4 ô ở 4 góc vẫn được coi là cạnh nhau. Điều này là bởi vì biểu đồ Karnaugh có thể được gấp lại theo cả 2 chiều ngang và dọc.

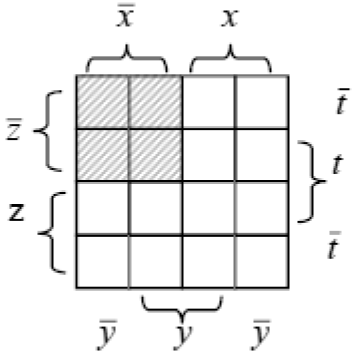
Ví dụ : Hãy tìm công thức đa thức tối tiểu của *f* sau đây

$$f(x,y,,z,t)= x.\bar{y}.\bar{z}.t + \bar{x}.y.z.t + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t + x.\bar{y}.\bar{z}.\bar{t} + \bar{x}.y.\bar{z}.\bar{t} + \bar{x}.y.\bar{z}.t + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.\bar{t}$$

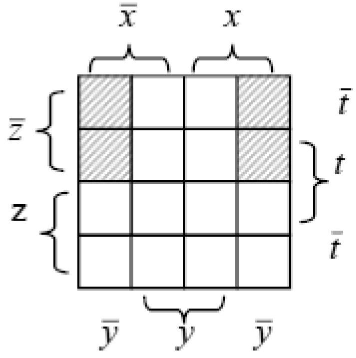
Bước 1. Xây dựng biểu đồ Karnaugh của hàm *f:*



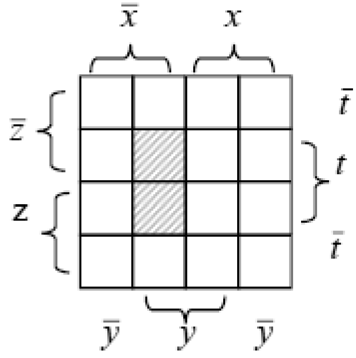
Bước 2. Xác định tất cả các tế bào lớn:



Tế bào lớn $\bar{x}.\bar{z}$



Tế bào lớn $\bar{y}.\bar{z}$



Tế bào lớn $\bar{x}.y.t$

Bước 3. Tìm một số lượng ít nhất các tế bào lớn để phủ các ô đã được đánh dấu.
Ở đây, dễ thấy là ta không thể bỏ tế bào lớn nào.
Như vậy, công thức đathức tối tiểu của hàm Boole ban đầu là:

$$f(x,y,,z,t) = \bar{x}.\bar{z} + \bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.t$$

d. *Khi áp dụng phương pháp biểu đồ Karnaugh, cần lưu ý các điểm sau:*

- Vẽ biểu đồ Karnaugh phải tuyệt đối chính xác. Chỉ nhầm lẫn việc đánh dấu 1 ô sẽ dẫn tới kết quả hoàn toàn sai lệch trong những bước tiếp theo.
- Việc xác định các tế bào lớn phải thận trọng, nếu xác định không chính xác các tế bào lớn thì công thức thu được cuối cùng có thể không phải là công thức dạng đơn giản nhất. (Do các tế bào lớn có nhiều ô hơn, nhưng số biến biểu diễn lại ít hơn).
- Khi chọn các tế bào lớn để phủ các ô được đánh dấu cần ưu tiên chọn những tế bào lớn bắt buộc (không thể không chọn) trước. Với những ô được đánh dấu chỉ thuộc một tế bào lớn duy nhất thì tế bào lớn này bắt buộc phải được chọn. Bên cạnh đó khi có hai tế bào lớn cùng phủ qua một ô thì ta ưu tiên chọn tế bào lớn có nhiều ô hơn để phủ.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Nếu Q có chân trị là T, hãy xác định chân trị của các biến mệnh đề P, R, S nếu biểu thức mệnh đề sau cũng là đúng

$$(\mathbf{Q} \to ((\neg \mathbf{P} \vee \mathbf{R}) \wedge \neg \mathbf{S})) \wedge (\neg \mathbf{S} \to (\neg \mathbf{R} \wedge \mathbf{Q}))$$

2. Cho đoạn chương trình sau
   - if n>5 then n:=n+2 ;
   - if ((n+2 = 8) or (n-3=6)) then n:= 2*n + 1 ;
   - if ((n-3=16) and (n div 5=1)) then n:= n + 3 ;
   - if ((n<>21) and (n-7=15)) then n:= n - 4 ;
   - if ((n div 5 = 2) or (n+1=20)) then n:=n+1 ;

   Ban đầu biến nguyên n được gán trị là 7. Hãy xác định giá trị n trong các trường hợp sau :
   a. Sau mỗi câu lệnh (nghĩa là khi qua câu lệnh mới thì gán lại n = 7)
   b. Sau tất cả các lệnh (sử dụng kết quả của câu lệnh trước để tính toán cho câu sau)

3. Cho đoạn chương trình sau :
   - if n-m = 5 then n:= n-2 ;
   - if ((2*m=n) and (n div 4 =1) then n:= 4*m - 3 ;
   - if ((n<8) or (m div 2=2)) then n:= 2*m else m:= 2*n ;
   - if ((n<20) and (n div 6 =1) then m:= m-n-5 ;
   - if ((n= 2*m) or (n div 2= 5)) then m:= m+2 ;
   - if ((n div 3 = 3) and (m div 3 <>1)) then m:= n ;
   - if m*n <> 35 then n:= 3*m+7 ;

   Ban đầu biến nguyên n = 8 và m = 3. Hãy xác định giá trị của m, n trong các trường hợp sau :
   a. Sau mỗi câu lệnh (nghĩa là khi qua câu lệnh mới thì gán lại n = 7)
   b. Sau tất cả các lệnh (sử dụng kết quả của câu lệnh trước để tính toán cho câu sau)

4. Vòng lặp Repeat ... Until trong một đoạn chương trình Pascal như sau :

   Repeat
   .....
   Until ((x<>0) and (y>0)) or (not ((w>0) and (t=3)) ;

   Với mỗi cách gán giá trị biến như sau, hãy xác định trong trường hợp nào thì vòng lặp kết thúc.
   a. x= 7, y= 2, w= 5, t= 3
   b. x= 0, y= 2, w= -3, t= 3
   c. x= 0, y= -1, w= 1, t= 3
   d. x= 1, y= -1, w= 1, t= 3

5. Cho a và b là hai số nguyên dương. Biết rằng, trong 4 mệnh đề sau đây có 3 mệnh đề đúng và 1 mệnh đề sai. Hãy tìm mọi cặp số (a, b) có thể có.
   a. a+1 chia hết cho b
   b. a = 2b + 5
   c. a+b chia hết cho 3
   d. a+7b là số nguyên tố

6. Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, chứng minh

rằng các biểu thức mệnh đề sau là hằng đúng

a. $(P \wedge Q) \rightarrow P$
b. $P \rightarrow (\neg P \rightarrow P)$
c. $P \rightarrow ((Q \rightarrow (P \wedge Q))$
d. $\neg (P \vee \neg Q) \rightarrow \neg P$
e. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

7. Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, xét xem biểu thức mệnh đề G có là hệ quả của F không ?

a. $F = P \wedge (Q \vee R)$ $G = (P \wedge Q) \vee R$
b. $F = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ $G = P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
c. $F = P \wedge Q$ $G = (\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$

8. Không lập bảng chân trị, chứng minh các tương đương logic sau đây:

a. $(P \vee Q) \wedge \neg (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
b. $\neg(\neg((P \vee Q) \wedge R) \vee \neg Q) \Leftrightarrow Q \wedge R$
c. $((P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$
d. $\neg(P \vee Q) \vee ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(Q \wedge P)$
e. $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \wedge (R \vee \neg Q)) \Leftrightarrow \neg (Q \vee P)$
f. $P \vee (P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
g. $P \vee Q \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$ h/ $((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R) \Leftrightarrow P \wedge Q$
h. $P \wedge ((\neg Q \rightarrow (R \wedge R)) \vee \neg (Q \vee (R \wedge S) \vee (R \wedge \neg S))) \Leftrightarrow P$
i. $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee S \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg S \vee R) \Leftrightarrow P \vee (R \wedge (S \vee \neg Q)$

9. Cho P(x,y) là câu "x là thành phố của y". Hãy xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) P(Viên Chăn, Lào)
b) P(Hà Nội, Việt Nam)
c) P(Hà Nội, Trung Quốc)
d) P(Bắc Kinh, Trung Quốc)

10. Cho P(x, y) là mệnh đề chứa biến: "x đã học học phần y". Với $x \in X$: tập hợp các sinh viên trong lớp, $y \in Y$: tập các học phần phải học trong kỳ này. Hãy diễn đạt các mệnh đề sau:

a) $\exists x \exists y P(x,y)$
b) $\forall x \exists y P(x,y)$
c) $\exists x \forall y \overline{P(x, y)}$
d) $\exists x \forall y P(x,y)$
e) $\forall x \exists y \overline{P(x, y)}$
f) $\forall x \forall y P(x,y)$
g) $\overline{\exists x \forall y P(x, y)}$
h) $\forall y \exists x P(x,y)$
i) $\exists y \forall x P(x,y)$

11. Cho F(x,y) là mệnh đề chứa biến "x có thể lừa gạt y" trên tập X là tập con người trên thế gian này. Hãy diễn tả các câu sau dùng lượng từ:

a. Mọi người ai cũng có thể lừa gạt tôi.
b. Tôi không thể lừa gạt tất cả mọi người.
c. Không ai có thể lừa gạt tất cả mọi người.
d. Tôi không thể lừa gạt dù có một người.
e. Không ai có thể lừa gạt được chính mình.

12. Dùng lượng từ diễn đạt các câu nói sau, phủ định chúng rồi dịch các phủ định này trở lại câu thông thường:

a. Mọi người ai cũng thích môn toán rời rạc.
b. Có một người chưa bao giờ nhìn thấy chiếc máy tính.
c. Có một người đã học tất cả các môn toán.

d. Chưa có ai đã nhìn thấy chiếc máy tính lượng tử.
e. Có một lớp học mà mọi người trong đó đều giỏi môn toán.
f. Trong mọi lớp học đều có một học sinh không học giỏi môn toán.

13. Cho A, B, C là các tập hợp. Chứng minh rằng: $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

14. Cho A, B, C là các tập hợp. Chứng minh rằng: $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup A) - A$

15. Chứng minh rằng nếu A, B là các tập hợp thì: $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$ (ký hiệu $\bar{B}$ chỉ phần bù của B tức là $\{x / x \notin B\}$

16. Cho A, B, C là các tập hợp. Chứng minh rằng
   a. $(\overline{A \cap B \cap C}) = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$
   b. $(A - C) \cap (C - B) = \varnothing$
   c. $(A - B) - C \subseteq A - C$

17. Cho tập hợp $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Gọi P(B) là tập hợp tất cả các tập hợp con của tập hợp A
   a. Hãy liệt kê tất cả các phần tử của P(B).
   b. P(B) có bao nhiêu phần tử?

18. Bằng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh rằng nếu tập hợp A có n phần tử thì nó có cả thảy 2^ntập con.

19. Bằng phương pháp quy nạp chứng minh rằng 111...111 (3^n chữ số 1) chia hết cho 3^n với mọi số tự nhiên n.

20. Bằng phương pháp quy nạp chứng minh công thức sau đúng với mọi số tự nhiên n.
   a. $1^2 + 1^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)$
   b. $S_n = \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^n+1}}$

21. Trong một lớp học ngoại ngữ, tập hợp A các học viên nữ có 4 phần tử, tập hợp B các học viên từ 20 tuổi trở lên có 5 phần tử. Có 3 học viên nữ từ20 tuổi trở lên. Tìm số phần tử của tập hợp $A \cup B$.

22. Trên một bãi để xe, có 42 xe gồm taxi và xe buýt. Có 14 xe màu vàng và 37 xe buýt hoặc xe không có màu vàng. Hỏi trên bãi để xe có bao nhiêu xe buýt vàng?

23. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 15 em học khá môn Toán, 16 em học khá môn Văn và 17 em học khá môn Tiếng Anh. Có 5 em học khá cả hai môn Văn và Toán, 8 em học khá cả hai môn Toán và Anh, 6 em học khá cả hai môn Văn và Anh, và 2 em học khá cả ba môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh
   a. Chỉ học khá môn Toán
   b. Chỉ học khá môn Văn?
   c. Chỉ học khá môn Anh?
   d. Không học khá môn nào?

24. Trên mặt phẳng kẻ *n* đường thẳng sao cho không có ba đường nà đồng qui và không có hai đờng nào song song. Hỏi mặt phẳng được chia làm mấy phần ?

25. Hãy nghĩ ra thuật toán đệ quy tìm số hạng thứ n của dãy được xác định như sau: $a_0=1$, $a_1 = 2$ và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với n = 2, 3, 4, ...

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Một tập thể gồm 14 người gồm 6 nam và 8 nữ trong đó có An và Bình , người ta muốn chọn 1 tổ công tác gồm 6 người. Tìm số cách chọn tổ sao cho có 1 tổ trưởng , 5 tổ viên trong đó An và Bình không đồng thời có mặt.
2. Cho A là một tập hợp tập có 20 phần tử
   a. Có bao nhiêu tập hợp con của A
   b. Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà có số phần tử là số chẵn
3. Một nhóm gồm 10 học sinh, trong đó 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh trên thành 1 hàng dọc sao cho 7 học sinh nam phải đứng liền nhau.
4. Cho tập E={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từ E mà chia hết cho 5?
5. Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng 6
6. Xem đoạn chương trình PASCAL dưới đây, trong đó i, j, k là các biến nguyên.

```
For i := 1 to 12 do
For j := 5 to 10 do
For k := 15 downto 8 do
Writeln ( (i-j)*k );
```

   Lệnh Writeln được thực hiện bao nhiêu lần?
7. Giả sử n là một hằng số cho trước. Xác định giá trị của biến nguyên *counter* sau khi thực hiện đoạn chương trình PASCAL dưới đây. (Ở đây i, j và k là các biến nguyên)

```
Counter := 0;
For i := 1 to N do
For j := i to N do
For k := 1 to N do
Counter := Counter + 1
```

8. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số tự nhiên gồm các số có 6 chữ số khác nhau. Hỏi
   a. Có tất cả bao nhiêu số ?
   b. Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ ?
   c. Có bao nhiêu số bé hơn 432000?
9. Năm học sinh nam và 3 học sinh nữ được sắp xếp vào 8 chỗ ngồi. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho không có hai học sinh nữ ngồi vào cạnh nhau ?
10. Hãy tính số các từ khác nhau (có thể vô nghĩa) thu được bằng cách hoán vị các chữ cái của từ TOANHOCTUOITRE.
11. Hãy tính số các từ khác nhau (có thể vô nghĩa) thu được bằng cách hoán vị các chữ cái của từ TOANHOCTUOITRE mà trong đó không có ba chữ T đứng cạnh nhau.
12. Chứng minh các đẳng thức sau:
    a. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$
    b. $C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$
13. Chứng minh rằng $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_n^{m-k} C_{n-m+k}^k$
14. Có bao nhiêu cách xếp *k* bit 0 và *m* bit 1 (k ≤ m)trên vòng tròn được đánh số từ 1 đến

$m+k$ (vị trí $m+k$ kề với vị trí 1) sao cho không có 2 bit 0 kề nhau.

15. Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

16. 8 đội tham gia giải vô dịch bóng đá trong đó hai đội bất kì phải gặp nhau đúng 1 lần biết đến cuối giải khôngcó trận nào hòa . Chứng minh trong 8 đội trên luôn tìm được 4 đội ABCD thỏa mãn A thắng B,C,D ; B thắng C,D ; C thắng D.

17. Có 6 đội bóng thi đấu với nhau (mỗi đội phải đấu 1 trận với 5 đội khác). CMR vào bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

18. Cho 5 số nguyên phân biệt a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Xét tích : $P=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)(a_3-a_4)(a_3-a_5)(a_4-a_5)$. Chứng minh rằng P chia hết cho 288.

19. Bên trong tam giác đều ABC cạnh 1 đặt 5 điểm. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 0,5

20. Người đưa thư tên là Phong được phân công đưa thư ở một làng nhỏ mang tên Mười nhà. Làng này, chỉ có 1 đường phố và có 10 nhà, đánh số từ 1 đến 10. Trong một tuần nọ, Phong không đưa thư tại hai ngôi nhà của làng; tại các nhà khác anh ấy đưa thư đúng ba lần. Mỗi một ngày làm việc anh ấy đưa thư tại đúng 4 nhà.
Tổng của số các ngôi nhà mà Phong đưa thư là:
    - Thứ hai : 18
    - Thứ ba : 12
    - Thứ tư : 23
    - Thứ năm : 19
    - Thứ sáu : 32
    - Thứ bảy : 25

    Chủ nhật: Phong không làm việc.
    Hỏi Hai nhà nào không nhận được thư trong tuần này?

21. cho X ={0,1,...,10} .Chứng tỏ rằng nếu S là 1 tập con gồm 7 phần tử của X thì có 2 phần tử của S có tổng bằng 10 .

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Trong các quan hệ sau, hãy cho biết quan hệ nào có tính phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu:
    a. Quan hệ R trên Z : xRy ⇔ x + y chẵn.
    b. Quan hệ R trên Z : xRy ⇔ x - y lẻ.
    c. Quan hệ R trên Z : xRy ⇔ $x^2 + y^2$ chẵn.
2. Các quan hệ nào dưới đây trên tập mọi người là tương đương ?
    a. {(a, b)|a, b cùng tuổi}
    b. {(a, b)|a, b có cùng bố mẹ}
    c. {(a, b)|a, b nói cùng 1 thứ tiếng}
3. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} và R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)}
    a. Kiểm tra R là một quan hệ tương đương.
    b. Tìm các lớp tương đương $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$.

4. Xét một tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 6, 9}, định nghĩa một quan hệ R trên A như sau R = {(x, y)|x − y là bội số của 3}
   a. Liệt kê các phần tử của R
   b. Chứng minh R là quan hệ tương đương trên A
   c. Các lớp tương đương của R là gì ?

5. Gọi R là quan hệ hai ngôi "có cùng số dư với... trong phép chia cho 4" trên tập hợp N.
   a. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên tập hợp N.
   b. Quan hệ tương đương R trên N chia tập hợp N thành mấy lớp tương đương? Hãy vẽ sơ đồ Ven biểu diễn các lớp tương đương của quan hệ R.

6. Cho tập hợp X = {1, 2, 3, 4, 5} và P = P(X) là tập hợp các tập con của X. Gọi R là quan hệ hai ngôi trên P xác định bởi: A R B khi và chỉ khi N (A) = N (B) *trong đó N (C) là số phần tử của tập hợp C ⊂ X.*
   a. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên P.
   b. Tìm lớp tương đương của quan hệ ~ trên P, có đại diện là phần tử {1, 3} của P.

7. Ký hiệu C* chỉ tập hợp các số phức có phần thực khác 0. Gọi R là quan hệ hai ngôi trên C* xác định bởi (a + bi) R (c + di) khi và chỉ khi ac > 0. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên C*.

8. Cho tập X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} và quan hệ hai ngôi R xác định trên X như sau: x,y∈X, xRy ⇔ (x+y)÷2 (ký hiệu ÷ diễn tả ý ***"chia hết cho"***).
   a. Tập R có những phần tử nào?
   b. Quan hệ hai ngôi R có những tính chất gì?
   c. R có phải là quan hệ tương đương trên X? Nếu phải thì hãy tìm lớp tương đương của các phần tử 1, 2. Tập thương X/R có những phần tử nào?

9. X = { 1,2,3,4,5} x { 1,2,3,4,5} . Xét quan hệ 2 ngôi R trên X được định nghĩa như sau: (a,b) R (c,d) ⇔ a+b = c+d
   a. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên X.
   b. Tìm các lớp tương đương.

10. Cho tập hợp X = {1, 3, 9, 18, 36}. Gọi ≤ là quan hệ "chia hết" trên X.
   a. Chứng minh ≤ là một quan hệ thứ tự trên X.
   b. Quan h • thứ tự ≤ trên X có ph •i là quan hệ thứ tự toàn ph •n không?

11. Cho R là quan hệ hai ngôi trên tập hợp C các số phức xác định như sau: Với mọi a + bi, c + di ∈ C, (a + bi) R (c + di) khi và chỉ khi a ≤ c và b ≤ d.
   a. Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên C.
   b. R có phải là quan hệ thứ tự toàn phần không?

12. Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất của tập A= {2,3,4,5,6,12,30,60} đối với quan hệ chia hết trên N*

13. Cho tập hợp sắp thứ tự (X, ≤) với X = {3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9} và ≤ là quan hệ "chia hết cho" trên X (a ≤ b ⇔ a chia hết cho b). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của X.

14. Giả sử A = P(E) với E = {1, 2, 3}. Trong tập hợp A với thứ tự bao hàm, hãy tìm sup và inf của tập hợp con B ⊂A dưới đây:
   a. B = {{1}, {2}}
   b. B = {{1}, {2}, {3}, {1, 2}}
   c. B = { ∅, {1}, {2}, {1, 2}}

15. Cho tập hợp X = {2, 5, 8, 10, 20, 40} và R là quan hệ "chia hết" trên X định nghĩa như sau : a R b ⇔ a chia hết b.
    a. Chứng tỏ R là quan hệ thứ tự.
    b. Tìm các phần tử tối đại và tối tiểu của X.
    c. Tìm phần tử lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của X.

16. Tìm các phần tử chặn trên và chặn dưới (nếu có) của mỗi tập con A = {7, 11} và B = {2, 4, 6, ..., 2n, ...} trong tập hợp sắp thứ tự {N*, ≤}, trong đó ≤ là quan hệ "chia hết" trên tập hợp N*

17. Giả sử {R, ≤} là tập hợp sắp thứ tự, trong đó ≤ là quan hệ "nhỏ hơn hoặc bằng" (thông thường) trên tập hợp các số thực R. Tìm các phần tử chặn trên và các phần tử chặn dưới của tập hợp A = [−7, 3) = {x ∈ R : −7 ≤ x < 3} trong R.

18. Cho tập X={a,b,c,d}.
    a. Hãy liệt kê các phần tử của tập tất cả các tập hợp con của X (kí hiệu là P(X))
    b. Chứng minh quan hệ bao hàm là quan hệ thứ tự trên P(X).
    c. Tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, tối đại, tối tiểu của tập Y={{a}; {a,b}; {a,b,c}; {a,b,d}}
    d. Tương tự câu hỏi c) đối với tập P(X); P(X)\X

19. Cho A = {1,2,3,4,5} . Cho R và S là hai quan hệ (2 ngôi) trên A có ma trận biểu diễn lần lượt là

$$MR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

    a. Chứng minh rằng R và S là những quan hệ thứ tự trên A.
    b. Vẽ các biểu đồ Hasse cho (A,R) và (A,S).

20. Cho (A, ≤) là tập hợp sắp thứ tự, trong đó A= {2, 4, 5, 10, **12**, 20, 25} là quan hệ "chia hết"
    a. Vẽ biểu đồ Hasse cho (A, ≤)
    b. Dựa vào biểu đồ Hasse tìm phần tử cực đại, cực tiểu của (A, ≤)

21. Cho (A, ≤) là tập hợp sắp thứ tự, trong đó A là tập các chuỗi nhị phân có độ dài bằng 3, ≤ là quan hệ "nhỏ hơn hoặc bằng" thông thường
    a. Vẽ biểu đồ Hasse cho (A, ≤)
    b. Dựa vào biểu đồ Hasse tìm phần tử cực đại, cực tiểu của (A, ≤)
    c. Dựa vào biểu đồ Hasse tìm phần tử tối đại, tối tiểu của (A, ≤)

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Kiểm tra tính giao hoán và tính kết hợp của các phép toán sau đây :
    a. Phép toán * trên **N** cho bởi : a * b = a+b+2, ∀ a,b ∈ **N**.
    b. Phép toán * trên X = { x ∈ **R** | x > 0} định bởi : a* b = ab/(a+b).
    c. Phép toán * trên **R** định bởi : a* b = a+b+ab.

2. Chứng minh rằng
    a. (a+b).(a+b')=a

b. (a.b)+(a’.c)=(a+c).(a’+b)

3. Cho S là tập hợp các ước nguyên dương của 70, với các phép toán •, + và ’ được định nghĩa trên S như sau:

   a • b = UCLN(a, b), a + b = BCNN(a, b), a’ = 70/a.

   Chứng tỏ rằng S cùng với các phép toán •, + và ’ lập thành một đại số Boole.

4. Cho các hàm Boole F_1, F_2, F_3 xác định bởi bảng sau:

X	y	z	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

   Vẽ mạch các cổng logic thực hiện các hàm Boole này.

5. Dùng các bản đồ Karnaugh, tìm dạng đa thức tối tiểu của các hàm Boole ba biến sau:
   a. $F = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$.
   b. $F = xyz + xy\bar{z} + + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$.
   c. $F = xy\bar{z} + + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$.
   d. $F = xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

6. Dùng các bản đồ Karnaugh, tìm dạng đa thức tối tiểu của các hàm Boole ba biến sau:
   a. $F = wxyz + wx\bar{y}z + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z$.
   b. $F = wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$.
   c. $F = wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$.
   d. $F = wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$.

7. Cho hàm Boole f(x,y)= $x.\bar{y} + \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y$
   a. Tìm đa thức tối tiểu của f(x,y).
   b. Vẽ mạch logic biểu diễn hàm f(x,y) và đa thức tối tiểu của f(x,y)

MỤC LỤC